



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ.
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА
ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ КИБЕРНЕТИКА

ТОМ 24



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СЕРИЯ

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ.
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА.
ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ КИБЕРНЕТИКА

Том 24

Научный редактор
член-корр. АН СССР Р. В. Гамкрелидзе

Серия издается с 1966 г.



МОСКВА 1986

Главный редактор информационных изданий ВИНТИ
профессор *А. И. Михайлов*

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

информационных изданий по математике

Главный редактор чл.-корр. АН СССР *Р. В. Гамкредидзе*
Члены редколлегии: канд. физ.-мат. наук *Д. Л. Келенджеридзе*,
канд. физ.-мат. наук *М. К. Керимов*, академик *А. Н. Колмогоров*,
чл.-корр. АН СССР *Л. Д. Кудрявцев*, профессор *В. Н. Латышев*,
профессор *А. В. Малышев*, академик *С. М. Никольский*,
профессор *Н. М. Остиану* (ученый секретарь редколлегии),
академик *Л. С. Понтрягин*, доктор физ.-мат. наук *Н. Х. Розов*,
профессор *В. К. Саульев*, профессор *А. Г. Свешников*

СЛУЧАЙНЫЕ ДЕТЕРМИНАНТЫ

В. Л. Гурко

В обзоре собраны основные утверждения теории случайных детерминантов, возникшей на стыке теории вероятностей и смежных с нею наук. Впервые распределения случайных детерминантов начали изучать в многомерном статистическом анализе, где было получено следующее изящное утверждение: пусть $\Xi = (\xi_{ij})_{i,j=1}^n$ — вещественная матрица, элементы которой независимы и распределены по нормальному закону $N(0, 1)$, тогда

$$\det \Xi_n^2 \approx \prod_{i=1}^n \sum_{j=1}^i \xi_{ij}^2, \text{ где символ } \approx \text{ означает совпадение распределений случайных величин.}$$

В настоящее время распределения случайных детерминантов находят применения также в теории управления линейными стохастическими системами, в линейном стохастическом программировании, в теории неупорядоченных кристаллических структур, в статистической физике. Результаты и методы теории случайных детерминантов настолько разносторонни и глубоки, что эта теория в настоящее время является одним из главнейших направлений теории вероятностей и ее применений. Особенно плодотворным явилось применение теории случайных детерминантов в G -анализе наблюдений над случайными векторами, позволившее значительно уменьшить объем выборочных значений при решении практических задач.

§ 1. Полярное разложение случайных матриц

Пусть $\Xi = (\xi_{ij})$, $i=1, \dots, n$, $j=1, \dots, m$, $m \geq n$, — прямоугольная вещественная случайная матрица. Предположим, что существует совместная плотность распределения случайных элементов ξ_{ij} , равная $p(X)$, где X — вещественная матрица той же размерности, что и Ξ . Полярным разложением матрицы Ξ будем называть представление матрицы Ξ в виде $\Xi = SU$, где S — неотрицательно определенная матрица, а U — ортогональная матрица. Функция распределения матриц S и U найдена в работе [31]: пусть G — группа m -мерных вещественных ортого-

нальных матриц и μ — нормированная мера Хаара на ней. Тогда [31]

$$\begin{aligned} P\{S^2 \in L_1, U \in L_2\} = \\ = c_{n,m} \int_{Z \in L_1, H^{(n)} \in L_2} p(\sqrt{Z} H^{(n)}) \det Z^{(m-n-1)/2} \mu(dH) dZ, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где L_1 и L_2 — измеримые множества соответственно матриц S и U , $H = (h_{ij}) \in G$, $H^{(n)} = (h_{ij})$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$, $c_{n,m}^{-1} = \pi^{n(n-1)/4 - nm/2} \prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{m+1-i}{2}\right)$.

Если вектор-столбцы матрицы Ξ независимы и распределены по нормальному закону с нулевым вектором средних и невырожденной матрицей ковариаций R , то плотность распределения матрицы S^2 называется плотностью Уишарта [3,71] и равна

$$(2\pi)^{-\frac{mn}{2}} c_{n,m} \exp\left\{-\frac{1}{2} \text{Sp } R^{-1}Z\right\} \det Z^{(m-n-1)/2} \det R^{-n/2}. \quad (1.2)$$

Плотность Уишарта впервые была получена в многомерном статистическом анализе при нахождении плотности распределения эмпирической ковариационной матрицы [3]

$$\tilde{R} = (n-1)^{-1} \sum_{k=1}^n (x_k - \tilde{x})(x_k - \tilde{x}), \quad \tilde{x} = n^{-1} \sum_{k=1}^n x_k,$$

где x_k — независимые наблюдения над случайным m -мерным вектором ξ , распределенным по нормальному закону. Легко проверить, что $\tilde{R} \approx (n-1)^{-1} T T'$, где $T = (x_{ij} - M x_{ij})$, $j = 1, \dots, n-1$, $i = 1, \dots, m$, поэтому плотность распределения матрицы \tilde{R} легко получить из формулы (1.1). Различным обобщениям плотности Уишарта посвящены работы Джеймса [91]. Отметим, что в частности из формулы (1.1) вытекает следующее утверждение: если $p(\sqrt{Z} H^{(n)}) \equiv q(Z)$, то матрицы S и U стохастически независимы и

$$P\{S^2 \in L_1\} = c_{n,m} \int_{Z \in L_1} q(Z) \det Z^{(m-n-1)/2} dZ, \quad (1.3)$$

$$P\{U \in L_2\} = \int_{H^{(n)} \in L_2} \mu(dH). \quad (1.4)$$

С помощью формул (1.1) — (1.4) можно найти моменты случайных детерминантов. Если случайная вещественная матрица $\Xi = (\xi_{ij})$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$, $m \geq n$, имеет плотность $p(X)$ и существует $M(\det \Xi)^{2k}$, где k — целое неотрицательное число, то [31, 32]

$$M(\det \Xi)^{2k} = \frac{c_{n,m}}{c_{n,m+2k}} \int p(\sqrt{Z_{(m+2k) \times n} Z'_{(m+2k) \times n} H^{(n)}}) \mu(dH) dZ_{(m+2k) \times n}, \quad (1.5)$$

где Z — вещественная матрица размерности $(m+2k) \times n$. Здесь и в дальнейшем, если не указана область интегрирования, то интегрирование ведется по всей области изменения переменных подынтегральной функции.

Если дополнительно $p(X) = \tilde{p}(XX')$ для всех матриц X размера $m \times n$, то

$$M(\det \Xi)^{2k} = \frac{c_{n,m}}{c_{n,m+2k}} \int \tilde{p}(Z_{(m+2k) \times n} Z'_{(m+2k) \times n}) dZ_{(m+2k) \times n}.$$

Примером случайной матрицы, удовлетворяющей условию $p(X) = \tilde{p}(XX')$, может служить матрица, плотность которой равна

$$p(X) = (2\pi)^{-mn/2} \exp\left(-\frac{1}{2} \text{Sp} R^{-1} X X'\right) \det R_n^{-m/2},$$

R_n — положительно определенная матрица. В этом случае

$$M(\det \Xi)^{2k} = 2^{nk} \prod_{i=1}^n \frac{\Gamma\left(\frac{m+2k+1-i}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+1-i}{2}\right)} \det R_n^k. \quad (1.6)$$

Этот результат хорошо известен в многомерном статистическом анализе [3, 71].

Еще один пример плотности $p(X)$ матрицы Ξ , удовлетворяющей условию

$$p(X) \equiv \tilde{p}(XX'): p(X) = \Gamma\left(\frac{n+m}{2} + 1\right) \pi^{-(n+m)/2}, \quad \text{Sp} X X' \leq 1.$$

В этом случае

$$M(\det \Xi)^{2k} = c_{n,m} \Gamma\left(\frac{n+m}{2} + 1\right) \pi^{2k} \left[c_{n,m+2k} \Gamma\left(1 + \frac{n+m+2k}{2}\right) \right]^{-1}.$$

Формулу (1.6) можно получить проще с помощью метода ортогонализации [32, 38], основу которого составляет следующее преобразование: пусть T_n — вещественная ортогональная матрица n -го порядка, первый вектор-столбец которой с вероятностью 1 равен $\left\{ \xi_{1i} \left(\sum_{j=1}^n \xi_{1j}^2 \right)^{-1/2}, i = 1, \dots, n \right\}$, а все остальные вектор-столбцы измеримы относительно минимальной σ -алгебры, порожденной величинами ξ_{1i} , $i = 1, \dots, n$. Так как распределение вектор-строк матрицы $\Xi_n = (\xi_{ij})_{i,j=1}^n$, где ξ_{ij} — независимые случайные элементы, распределенные по стандартному нормальному

закону инвариантно относительно ортогональных преобразований, то

$$P \{ \det \Xi_n^2 < x \} = P \{ \det \Xi_n^2 \det T_n^2 < x \} = P \left\{ \sum_{i=1}^n \xi_{i1}^2 \det \Xi_{n-1}^2 < x \right\},$$

где $\Xi_{n-1} = (\xi_{ij})$, $i, j = 2, \dots, n$. Используя метод математической индукции, получаем, что $\det \Xi_n^2 \approx \prod_{i=1}^n \sum_{j=1}^i \xi_{ij}^2$. Из этого результата легко вывести (1.6). Различные обобщения этого утверждения можно найти в работах [32, 81].

§ 2. Моменты случайных детерминантов Вандермонда

Случайным детерминантом Вандермонда называется детерминант матрицы (η_j^i) , $i = 1, \dots, n$, $j = 0, \dots, n-1$, где η_i , $i = 1, 2, \dots$, — случайные величины. Несмотря на то, что для таких детерминантов справедлива простая формула $\det(\eta_j^i) = \prod_{i>j} (\eta_i - \eta_j)$, до сих пор для них не найдены не только распределения, но и моменты в самых простейших случаях, когда η_i независимы и распределены по какому-нибудь невырожденному закону. Исключение составляют в настоящее время два случая:

Теорема Метя [94]: Пусть η_i , $i = 1, 2, \dots$, независимы и распределены по нормальному закону $N(0, 1)$. Тогда для любых $n \geq 2$ и $k = 0, 1, 2, \dots$

$$M \prod_{i>j} |\eta_i - \eta_j|^k = \left[\Gamma \left(1 + \frac{k}{2} \right) \right]^{-n} \prod_{j=1}^n \Gamma \left(1 + \frac{kj}{2} \right). \quad (2.1)$$

Формулу (2.1) Метя получил с помощью одного результата Селберга [100]:

$$\int_0^1 \dots \int_0^1 \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)^{2k} \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha-1} (1-x_i)^{\beta-1} dx_i = \\ = \prod_{j=1}^n \frac{\Gamma(1+jk) \Gamma(\alpha + (j-1)k) \Gamma(\beta + (j-1)k)}{\Gamma(1+k) \Gamma(\alpha + \beta + (n+j-2)k)},$$

где $\operatorname{Re} \alpha > 0$, $\operatorname{Re} \beta > 0$, $\operatorname{Re} k > -\min \left\{ \frac{1}{n}, \frac{\operatorname{Re} \alpha}{n-1}, \frac{\operatorname{Re} \beta}{n-1} \right\}$. Формула (2.1) находит применение при нахождении нормирующих констант плотностей распределения собственных чисел случайных матриц, а также в теории управления линейными стохастическими системами [32, 48].

Гипотеза Дайсона [94]: Пусть $\theta_i, i=1, \dots, n$, — независимые случайные величины, распределенные равномерно на интервале $(0, 2\pi)$. Тогда для любого целого $k \geq 0$

$$M \prod_{p \neq l} |e^{i\theta_p} - e^{i\theta_l}|^k = \frac{\Gamma\left(1 + \frac{kn}{2}\right)}{\left[\Gamma\left(1 + \frac{k}{2}\right)\right]^n}. \quad (2.2)$$

Гипотезу Дайсона независимо друг от друга доказали Вильсон [94] и Гансон [94].

Формула (2.2) также находит применение в спектральной теории случайных матриц [37], а также в статистической теории энергетических уровней сложных систем [52].

§ 3. Интегральные представления для детерминантов

Детерминант как функция элементов случайной матрицы чрезвычайно сложен для исследования его аналитическими методами теории вероятностей, однако если воспользоваться формулой

$$\pi^{n/2} \det A_n^{-1/2} = \int \exp[-(A_n \vec{x}_n, \vec{x}_n)] \prod_{i=1}^n dx_i, \quad (3.1)$$

где A_n — положительно определенная матрица n -го порядка $\vec{x}_n = (x_1, \dots, x_n)$, то для изучения распределения случайных детерминантов можно использовать многие результаты теории вероятностей. Например, из формулы (3.1) вытекает следующая

$$M \det (I + \Xi \Xi')^{-k} = M \exp\left\{i \sum_{s=1}^{2k} (\Xi \xi_s, \eta_s)\right\}, \quad (3.2)$$

где $\Xi = (\xi_{ij})_{i,j=1}^n$ — случайная матрица, ξ_s, η_s — независимые векторы, не зависящие от матрицы Ξ , распределенные по нормальному закону $N(0, I)$, $k=0, 1, 2, \dots$. В правой части этой формулы стоит характеристическая функция суммы случайных величин, для изучения которых можно применить хорошо развитую теорию предельных теорем.

Кроме этих формул, в теории случайных детерминантов используются следующие [32]:

$$\int \exp[-((A_n - iC_n) \vec{x}, \vec{x})] \prod_{i=1}^n dx_i = \pi^{n/2} \det (A_n + iC_n)^{-1/2},$$

$$\exp\left[\frac{1}{2} (A_n \vec{y}, \vec{y})\right] = (2\pi)^{-n/2} \det A_n^{-1/2} \times \\ \times \int \exp\left\{\sum_{i=1}^n y_i x_i - \frac{1}{2} (A_n^{-1} \vec{x}, \vec{x})\right\} \prod_{i=1}^n dx_i,$$

где C_n — симметричная матрица.

Для несимметричных матриц A_n можно использовать интегральное представление следующего вида [32]:

$$\det(I + \alpha_i A_n)^{-1} = M \exp\{i\alpha_i ((A - A') \vec{\xi}, \vec{\eta}) - \alpha_i (A_n \vec{\xi}, \vec{\xi}) - \alpha_i (A_n \vec{\eta}, \vec{\eta})\}, \quad (3.3)$$

где $\alpha_i = t \left[1 + |\text{Sp } A| + \frac{1}{4} \text{Sp}(A + A')^2 \right]^{-1}$, $\vec{\xi}$ и $\vec{\eta}$ — независимые случайные векторы, распределенные по нормальным законам $N\left(0, \frac{1}{2} I\right)$.

§ 4. Интегрирование на алгебрах Грассмана и Клиффорда

Алгеброй Грассмана с $2n$ образующими называется алгебра, образующие которой $x_i, x_i^*, i=1, \dots, n$, удовлетворяют следующим условиям [4, 7, 10]

$$x_i x_j + x_j x_i = 0, \quad x_i^* x_j^* + x_j^* x_i^* = 0, \quad x_i x_j^* + x_j^* x_i = 0. \quad (4.1)$$

В частности, из этих соотношений (4.1) вытекает, что $x_i^2 = 0, (x_i^*)^2 = 0, i=1, \dots, n$. Алгебру Грассмана с $2n$ образующими будем обозначать Γ_{2n} . В ней можно выделить базисные одночлены $1, x_1, \dots, x_n, x_1^*, \dots, x_n^*, x_1 x_2, \dots, x_{n-1} x_n, x_1^* x_2^*, \dots, x_{n-1}^* x_n^*, \dots, x_1^*, \dots, x_n^*$. Любой элемент алгебры Γ_{2n} является полиномом вида

$$\sum c_{k_1 \dots k_n p_1 \dots p_n} x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n} (x_1^*)^{p_1} \dots (x_n^*)^{p_n}, \quad (4.2)$$

где $c_{k_1 \dots k_n p_1 \dots p_n}$ — комплексные величины.

Из соотношений (4.1) следует, что образующие в (4.2) имеют степени не выше первой. Любой элемент алгебры можно привести к виду (4.2) с помощью соотношений (4.1).

В общем случае представление любого элемента алгебры через образующие неоднозначно. Однозначности можно добиться различными путями, например, требуя, чтобы коэффициенты элемента были кососимметричными либо чтобы он всегда имел вид (4.2).

- Алгеброй Клиффорда K_n с n образующими будем называть алгебру, образующие которой k_1, \dots, k_n удовлетворяют соотношениям $k_i k_j + k_j k_i = 0, i \neq j, k_i^2 = 1, i, j = 1, \dots, n$.

Введем символы dx_i, dx_i^* , которые удовлетворяют условиям $dx_i dx_j + dx_j dx_i = 0, dx_i^* dx_j^* + dx_j^* dx_i^* = 0, dx_i^* dx_j + dx_j dx_i^* = 0,$

$$x_i dx_j + dx_j x_i = 0, \quad x_i^* dx_j + dx_j x_i^* = 0, \quad x_i dx_j^* + dx_j^* x_i = 0, \\ x_i^* dx_j^* + dx_j^* x_i^* = 0.$$

Определим однократные интегралы $\int dx_i = 0$, $\int dx_i^* = 0$, $\int x_i^* dx_i^* = 1$, $\int x_i dx_i = 1$. Под кратными будем понимать повторные интегралы. Будем считать, что введенный интеграл на Γ_{2n} удовлетворяет линейному свойству

$$\int (c_1 f_1 + c_2 f_2) dx_i^* = c_1 \int f_1 dx_i^* + c_2 \int f_2 dx_i^*,$$

$$\int (c_1 f_1 + c_2 f_2) dx_i = c_1 \int f_1 dx_i + c_2 \int f_2 dx_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

где c_1, c_2 — комплексные числа, $f_1, f_2 \in \Gamma_{2n}$.

Очевидно, что интеграл от элемента (4.2) по образующим $dx_i, dx_i^*, i = 1, \dots, n$, равен $c_{1\dots 1}$. Используя понятие интеграла на алгебре Грассмана, можно получить следующие интегральные представления для детерминантов.

Пусть A — квадратная комплексная матрица n -го порядка, тогда

$$\int \exp(A\vec{x}, \vec{x}^*) d\vec{x} d\vec{x}^* = \det A; \quad (4.3)$$

$$\int \exp[(A\vec{x}, \vec{x}^*) + (\vec{x}, \vec{\eta}^*) + (\vec{x}^*, \vec{\eta})] d\vec{x}^* d\vec{x} / \int \exp[(A\vec{x}, \vec{x}^*)] d\vec{x}^* d\vec{x} = \\ = \exp(A^{-1}\vec{\eta}^*, \vec{\eta}), \quad (4.4)$$

где $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\vec{x}^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$, $d\vec{x} = \prod_{i=1}^n dx_i$, $x_i, x_i^*, \eta_i, \eta_i^*$ — образующие алгебры Грассмана Γ_{4n} , матрица A^{-1} существует (под показательной функцией понимаем ее разложение в ряд). Впервые формулы (4.3) и (4.4) применил в теории случайных детерминантов Ф. А. Березин [4].

§ 5. Распределение корней характеристического уравнения

Задача о вычислении корней характеристического (векового) уравнения $\det(Iz - A) = 0$, где A — квадратная матрица, а z — комплексный параметр, не одно столетие привлекает внимание математиков. Задача эта трудна и казалось, что если матрица A — случайная, то задача вычисления распределения корней характеристического уравнения еще более усложняется. Однако если предположить, что у элементов матрицы A существует совместная плотность распределения $p(X)$, то плотность распределения собственных чисел (корней характеристического уравнения) такой матрицы имеет простой вид [66, 74]. Объяснить этот результат можно на следующем простом примере. Пусть задано уравнение $f(X) = \Xi$, где f — взаимно однозначное дифференцируемое преобразование на множестве L матриц X , Ξ — случайная матрица с плотностью распределения $p(Z)$, $Z \in L$. Очевидно, что тогда плотность распределения матрицы X рав-

на $p(f(Z))J(Z)$, где $J(Z)$ — якобиан преобразования $Y=f(Z)$, $Y, Z \in L$. Из этого примера видно, что если якобиан $J(Z)$ имеет простой вид, то плотность распределения решения уравнения $f(X) = \Xi$ также имеет простой вид, хотя оно может и не выражаться в явном виде через элементы матрицы Ξ .

С помощью этой простой идеи в настоящее время найдены формулы для совместных распределений собственных чисел и собственных векторов симметричных [19, 74], эрмитовых [28], несимметричных [20], комплексных [20], гауссовских [47], ортогональных [37] и унитарных случайных матриц. Сформулируем утверждение только для симметричных случайных матриц.

Пусть $\Xi_n = (\xi_{ij})$ — симметричная вещественная случайная матрица n -го порядка с плотностью распределения $p(Z_n)$, где $Z_n = (z_{ij})$ — вещественная симметричная матрица, $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$ — собственные числа матрицы Ξ , θ_i — ее собственные векторы, у которых первые ненулевые компоненты неотрицательны, Θ_n — случайная матрица, вектор-столбцы которой равны θ_i , $i = 1, \dots, n$, G — группа n -мерных вещественных ортогональных матриц, B — σ -алгебра борелевских множеств n -мерных ортогональных матриц на ней и μ — нормированная мера Хаара на группе G . Тогда [20, 32]

$$P\{\Theta_n \in E, \alpha_i < \lambda_i < \beta_i, i = 1, \dots, n\} = \\ = c \int p(X_n Y_n X_n') \prod_{i>j} (y_i - y_j) \mu(dX_n) dY_n, \quad (5.1)$$

где интегрирование ведется по области

$$\{y_1 > y_2 > \dots > y_n, \alpha_i < y_i < \beta_i, i = 1, \dots, n, x_{ii} > 0,$$

$$i = 1, \dots, n, X_n \in E\}, E \in B,$$

$$Y_n = (\delta_{ij} y_j), \quad dY_n = \prod_{i=1}^n dy_i, \quad c = 2^n \pi^{n(n+1)/4} \prod_{i=1}^n \left\{ \Gamma\left(\frac{n-i+1}{2}\right) \right\}^{-1},$$

δ_{ij} — символ Кронекера.

Если элементы ξ_{ij} , $i \geq j$, $i, j = 1, \dots, n$, независимы и распределены по нормальным законам $N\left(0, \frac{1+\delta_{ij}}{2}\right)$, то матрица Θ_n стохастически не зависит от собственных чисел матрицы Ξ_n и $P\{\Theta_n \in E\} = 2^n \int \mu(dX_n)$, $E \cap \{x_{ii} > 0, i = 1, \dots, n\}$.

Плотность распределения собственных чисел матрицы Ξ_n равна

$$2^{-3n/2} \pi^{-n(n+1)/4} c \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n y_i^2\right) \prod_{i>j} (y_i - y_j), \quad y_1 > \dots > y_n. \quad (5.2)$$

§ 6. Стохастическое условие Калмана

Предположим, что задана система уравнений, которая является математической моделью некоторой системы управления

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t), \quad (6.1)$$

где $x(t)$ — n -мерный вектор состояния системы управления, $u(t)$ — вектор управлений, A и B — некоторые случайные матрицы.

Система (6.1) называется вполне управляемой, если для двух произвольных точек x_1 и x_2 n -мерного евклидова пространства и двух произвольных значений t_1 и t_2 аргумента t существует такая функция управления $u(t)$, $t \in [t_1, t_2]$, при которой решение уравнения (6.1) удовлетворяет условиям $x(t_1) = x_1$, $x(t_2) = x_2$.

Калмэн [56] доказал следующее утверждение: для вполне управляемости системы (5.1) n -го порядка необходимо и достаточно, чтобы

$$\text{rang}(B, AB, \dots, A^{n-1}B) = n. \quad (6.2)$$

В частности, если матрица B состоит из одного вектор-столбца b , то условие (6.2) эквивалентно следующему

$$\det(b, Ab, \dots, A^{n-1}b) \neq 0. \quad (6.3)$$

К этому условию приходят в задачах наблюдаемости и идентификации в системах управления [56]. Если матрица A случайная, то представляет интерес задача вычисления функции распределения случайного детерминанта $\det(b, Ab, \dots, A^{n-1}b)$.

В некоторых случаях для него с помощью теоремы Метя и формулы (5.2) можно найти все моменты. Если элементы ξ_{ij} , $i \geq j$, симметричной матрицы A независимы и распределены по нормальным законам $N\left(0, \frac{1 + \delta_{ij}}{2}\right)$, а элементы вектора b независимы, не зависят от элементов ξ_{ij} , и распределены по нормальному закону $N(0, 1)$, то [48]

$$\begin{aligned} M |\det(b, Ab, \dots, A^{n-1}b)|^k &= \\ &= \frac{2^{n(k+2)/2} \pi^{-n(n+1)/4}}{n! (k+1)^n} \prod_{j=1}^n \frac{\Gamma\left(1 + \frac{(k+1)j}{2}\right)}{\Gamma(j/2)}, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

§ 7. Методы вычисления моментов случайных детерминантов

В этом параграфе собраны основные методы вычисления моментов случайных детерминантов. Будем считать, что все требуемые в формулах моменты случайных элементов матриц существуют.

1. Метод замены переменных. С ним мы уже встречались в § 1. Пусть Ξ — случайная действительная матрица n -го порядка, плотность распределения которой равна $p(X)$. Очевидно, что $M \det \Xi_n^k = \int p(X) \det X^k dX$. Введем замену переменных $X = \Phi(Y)$, где Φ — взаимно однозначное дифференцируемое преобразование. Тогда $M \det \Xi_n^k = \int p(\Phi(Y)) \det(\Phi(Y))^k J(Y) dY$, где $J(Y)$ — якобиан преобразования. Как мы уже видели, в некоторых случаях можно подобрать такое преобразование Φ , что моменты $M \det \Xi_n^k$ находятся в явном виде.

2. Метод ортогональных преобразований. Его удобно применять тогда, когда элементы матрицы Ξ_n независимы и распределены по нормальному закону с параметрами 0 и 1. В этом случае распределение матрицы Ξ_n при умножении ее на произвольную неслучайную ортогональную матрицу H_n не изменится. Докажем, например, следующее утверждение. Пусть Ξ_n — случайная матрица, элементы которой независимы и распределены по нормальному закону $N(0, 1)$, B — квадратная неслучайная матрица n -го порядка. Тогда распределение случайной величины $\det[B_n + \Xi_n]$ зависит только от сингулярных собственных чисел матрицы B_n и не зависит от других функций элементов матрицы B_n . Доказательство следует из того, что $B_n = U_n \Lambda V_n$, где U_n и V_n — ортогональные матрицы, Λ — диагональная матрица собственных чисел матрицы $B_n B_n'$.

Большое число результатов, полученных с помощью этого метода, приведено в [32].

3. Метод дифференцирования по параметру [82]. Пусть $D = \det(\partial/\partial s_{pl})_{l,j=1}^n$ — дифференциальный оператор. Очевидно, что

$$\det(\xi_{pl}) = D \exp \left\{ i \sum_{p,l=1}^n \xi_{pl} s_{pl} \right\}_{s_{pl}=0}, \quad p, l = 1, \dots, n.$$

Из этой формулы получаем

$$M \det^k(\xi_{pl}) = D^k M \exp \left\{ i \sum_{p,l=1}^n \xi_{pl} s_{pl} \right\}_{s_{pl}=0}, \quad p, l = 1, \dots, n,$$

где $k > 0$ — целое число.

Если случайные величины ξ_{pl} независимы, то эта формула приобретает вид

$$M \det^k(\xi_{pl}) = D^k \prod_{p,l=1}^n f_{pl}(s_{pl})|_{s_{pl}=0}, \quad p, l = 1, \dots, n,$$

где f_{pl} — характеристические функции случайных величин ξ_{pl} . В частности, если ξ_{pl} , $p, l = 1, \dots, n$, независимы и распределены по нормальным законам $N(0, \sigma_{pl}^2)$, то

$$\mathbf{M} \det^k (\xi_{pl}) = D^k \exp \left\{ -0,5 \sum_{p,l=1}^n s_{pl}^2 \sigma_{pl}^2 \right\}_{s_{pl}=0}.$$

4. Метод интегрирования на алгебрах Грассмана и Клиффорда. Пусть для любого значения целого положительного k задано k алгебр Грассмана с $2n$ образующими $(x_{is}, x_{is}^*, i=1, \dots, n)$, $s=1, \dots, k$, причем образующие разных алгебр Грассмана коммутируют между собой. Тогда,

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \det^k (\xi_{pl}) = & \mathbf{M} \int \exp \left\{ i \sum_{p,l=1}^n \xi_{pl} \left(\sum_{s=1}^k x_{ps} x_{is}^* \right) \right\} \times \\ & \times \prod_{\substack{p=1, \dots, n \\ s=1, \dots, k}} dx_{ps} dx_{ps}^* i^{-kn}. \end{aligned} \quad (7.1)$$

Если случайные величины ξ_{pl} независимы и их характеристические функции $f_{pl}(s_{pl})$ — аналитические, то формула (7.1) приобретает вид

$$\mathbf{M} \det^k (\xi_{pl}) = \int \prod_{p,l=1}^n f_{pl} \left(\sum_{s=1}^k x_{ps} x_{is}^* \right) \prod dx_{ps} dx_{ps}^* i^{-kn}.$$

В частности, если ξ_{pl} , $p, l=1, \dots, n$, независимы и распределены по нормальным законам $N(0, \sigma_{pl}^2)$, то

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \det^k (\xi_{pl}) = & \int \exp \left\{ -0,5 \sum_{p,l=1}^n \sigma_{pl}^2 \left(\sum_{s=1}^k x_{ps} x_{is}^* \right)^2 \right\} \times \\ & \times \prod dx_{ps} dx_{ps}^* i^{-kn}. \end{aligned}$$

5. Метод интегральных представлений. Он применяется в основном для вычисления моментов случайных величин $\det \Xi^{-1}$. Используя формулу (3.2), получаем

$$\mathbf{M} [\det (I + \Xi_n \Xi_n')]^{-k} = \mathbf{M} \exp \left[i \sum_{p,l=1}^n \xi_{pl} \left(\sum_{s=1}^{2k} \eta_{ps} \zeta_{ls} \right) \right],$$

где ξ_{pl} — элементы квадратной матрицы Ξ_n , η_{ps} , ζ_{ls} , $p, l, s=1, 2, \dots$, — независимые случайные величины (не зависящие от ξ_{pl}), распределенные по нормальному закону $N(0, 1)$. В частности, если ξ_{pl} , $p, l=1, \dots, n$, независимы и распределены по нормальному закону $N(0, \sigma_{pl}^2)$, то

$$\mathbf{M} (\det (I + \Xi_n \Xi_n'))^{-k} = \mathbf{M} \exp \left[-0,5 \sum_{p,l=1}^n \sigma_{pl}^2 \left(\sum_{s=1}^{2k} \eta_{ps} \zeta_{ls} \right)^2 \right].$$

Разлагая экспоненту в ряд, можно получить формулы для моментов случайных детерминантов $\det (I + \Xi_n \Xi_n')^{-1}$.

6. Спектральный метод. Если у элементов квадратной случайной матрицы Ξ_n существует совместная плотность распределения, то у собственных чисел $\lambda_i, i=1, \dots, n$, такой матрицы, выбранных определенным образом, существует совместная плотность распределения $p(x_i, i=1, \dots, n)$ и она в некоторых случаях имеет простой вид (см. § 5). Используя этот факт, можно вычислить моменты случайных детерминантов $\det \Xi_n$,

$$\text{поскольку } \det \Xi_n = \prod_{i=1}^n \lambda_i.$$

7. Метод рекуррентных уравнений. Разлагая детерминант случайной матрицы по любой вектор-строке (столбцу), можно получить некоторые рекуррентные уравнения для моментов случайных детерминантов. Однако они настолько сложны, что решить их удается только в специальных случаях. Приведем один пример вычисления моментов случайных детерминантов с помощью метода рекуррентных уравнений [54, 96].

Пусть элементы ξ_{ij} случайной матрицы Ξ_n независимы, одинаково распределены. Тогда

$$\begin{aligned} M \det \Xi_n^{2k+1} &= 0, \quad n > 1, \quad k=0, 1, 2, \dots, \\ M \det \Xi_n^2 &= n! (m_2 - m_1^2)^{n-1} (m_2 - m_1^2 + nm_1^2), \end{aligned} \quad (7.2)$$

где $m_k = M \xi_{11}^k$.

Обозначим через $\Xi_{j_1 j_2 \dots j_k}^{i_1 i_2 \dots i_k}$ матрицу, у которой вычеркнуты строки и столбцы с номерами i_s, j_s . Если мы поменяем местами любые две строки матрицы Ξ_n , то распределение детерминанта новой матрицы будет совпадать с распределением $\det \Xi_n$. Поэтому распределение $\det \Xi_n$ будет симметрично при $n > 1$, следовательно, $M \det \Xi_n^{2k+1} = 0, n > 1, k=0, 1, 2, \dots$

Разложим $\det \Xi_n$ по первому столбцу. Тогда

$$M \det \Xi_n^2 = nm_2 M \det \Xi_{n-1}^2 + \sum_{k \neq 1} m_1^2 M \det \Xi_1^k \det \Xi_1^l (-1)^{k+l}. \quad (7.3)$$

Распределение величины $M \det \Xi_1^k \det \Xi_1^l (-1)^{k+l}$ не зависит от выбора чисел k и $l, k \neq l$. В этом легко убедиться, меняя соответствующие строки матриц Ξ_1^k и Ξ_1^l местами. Аналогично получаем

$$\begin{aligned} M \det \Xi_1^2 \det \Xi_1^2 &= (n-1) m_2 M \det \Xi_{n-2}^2 - (n-1)(n-2) \times \\ &\quad \times m_1^2 M (\det \Xi_{12}^{12} \det \Xi_{13}^{21}). \end{aligned} \quad (7.4)$$

Из формулы (7.3) следует

$$\begin{aligned} M \det \Xi_{n-1}^2 &= (n-1) m_2 M \det \Xi_{n-2}^2 - (n-1)(n-2) \times \\ &\quad \times m_1^2 M (\det \Xi_{12}^{12} \det \Xi_{13}^{21}). \end{aligned} \quad (7.5)$$

Исключая $M (\det \Xi_{12}^{12} \det \Xi_{13}^{21})$ из (7.4), (7.5), находим

$$M \det \Xi_n^2 = nm_2 M \det \Xi_{n-1}^2 - n(n-1) m_1^2 M \det \Xi_{n-1}^2 - \\ - n(n-1)^2 m_1^4 M \det \Xi_{n-2}^2 + n(n-1)^2 m_2 m_1^2 M \det \Xi_{n-2}^2; \quad (7.6)$$

Пусть $M \det \Xi_n^2 = m_1^{2n} n! y_n$, $m_1 \neq 0$. Тогда из (7.6) следует $y_n = y_{n-1}(\gamma + 2 + n) + (n-1)\gamma y_{n-2}$, $y_1 = \gamma + 1$, $y_2 = \gamma(\gamma + 2)$, (7.7) где $\gamma = m_2/m_1^2 - 1$.

Предположим, что $y_0 = 1$, и найдем производящую функцию $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n t^n / n!$. На основании (7.7) получаем $f'(t)(1+t) = = f(t)(1+\gamma+\gamma t)$. Решение этого уравнения равно $f(t) = = c(1+t)e^{\gamma t}$, c — произвольная константа. Отсюда, учитывая (7.7), получаем (7.2).

Если $m_1 = 0$, то (7.2) вытекает из формулы (7.3).

Аналогично находим при условии, что $m_1 = 0$ [95],

$$M \det \Xi_n^4 = m_2^{2n} (n!)^2 n^{-1} \sum_{k=0}^n (n-k+1)(n-k+2) \times \\ \times (kl)^{-1} ((m_4/m_2) - 3)^k.$$

8. «Прямой» метод вычисления моментов случайных детерминантов. Разлагая детерминант по некоторым строкам и столбцам и вычисляя математическое ожидание полученной суммы, можно получить некоторые простые результаты [98].

Пусть элементы ξ_{ij} случайной матрицы Ξ_n независимы. Очевидно, что $M \det \Xi_n = \det M \Xi_n$. Если дополнительно $M \xi_{ij} = 0$, $M \xi_{ij} = m_{ij}^2$, то $M \det \Xi_n^2 = \text{per } K_n$, где $K_n = (m_{ij}^2)$ — квадратная матрица n -го порядка.

9. Метод возмущений. Используя формулы возмущений матриц, можно получить различные приближенные выражения при достаточно большом n для моментов случайных детерминантов $M |\det \Xi_n|^{k/c_n}$, где c_n — некоторая последовательность нормирующих чисел, а k — целые положительные числа, не зависящие от n .

§ 8. Гипотеза Фреше

Пусть X_n — множество квадратных матриц n -го порядка, элементы которых принимают значения либо $+1$, либо -1 . Гипотеза Фреше заключается в том, что при $n \geq 4$ $\max_{A_n \in X_n} \det A_n = = n^{n/2}$ тогда и только тогда, когда $n \equiv 0 \pmod{4}$. Другими словами, матрицу A_n , $n \geq 4$, составленную из элементов ± 1 , можно выбрать ортогональной тогда и только тогда, когда $n \equiv 0 \pmod{4}$.

Эта гипотеза известна давно, существует большое число примеров, когда она справедлива, но ее доказательства в общем случае нет [76].

Необходимость условия $n \equiv 0 \pmod{4}$ доказывается легко. Выберем элементы a_{ij} , $i, j = 1, \dots, n$, матрицы A_n так, чтобы $a_{11} = 1$, $a_{i1} = 1$, $a_{i\bar{i}} = 1$, $i = 1, \dots, n$. Нетрудно понять, что такой выбор элементов не ограничивает общности рассуждений так же, как и допущение, что во второй строке на первых $n/2$ местах стоят $+1$, а на остальных -1 . Обозначим количество $+1$ на первых $n/2$ местах в третьей строке через t_1 , а число -1 на остальных $n/2$ местах через t_2 . Так как матрица A_n ортогональная, то $t_1 - t_2 = 0$, $t_1 + t_2 = n/2$. Отсюда следует, что n кратно четырем при $n \geq 4$.

Гипотезу Фреше можно сформулировать в терминах случайных матриц. Пусть $\Xi_n = (\xi_{ij})$ — квадратная случайная матрица n -го порядка, ξ_{ij} , $i, j = 1, \dots, n$, — независимые случайные величины и $P\{\xi_{ij} = +1\} = P\{\xi_{ij} = -1\} = 1/2$. Тогда [57]

$$\max |\det \Xi_n| = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[2k]{M \det \Xi_n^{2k}}. \quad (8.1)$$

Используя формулу (8.1), можно найти следующие оценки снизу [57, 96]:

$$\max |\det \Xi_n| \geq \sqrt{M \det \Xi_n^2} = \sqrt{n!}.$$

$$\max |\det \Xi_n| \geq \left[n^{-1} (n!)^2 \sum_{k=0}^n (k!)^{-1} (n-k+1)(n-k+2)(-2)^k \right]^{1/4}.$$

Гипотезу Фреше можно заменить некоторой эквивалентной гипотезой, на основании следующего утверждения: Пусть η_i , $i = 1, \dots, n$, — случайные величины, распределенные по совместному нормальному закону, $M\eta_i = 0$, $M\eta_i^2 = 1$, $i = 1, \dots, n$.

Тогда $M \prod_{i=1}^n \eta_i^2$ минимально в том и только том случае, если η_i , $i = 1, \dots, n$, независимы. Пусть случайные величины ξ_k независимы и распределены $N(0, 1)$. Рассмотрим выражение

$$n^{-n} M \left[\prod_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n \xi_k e_{kj} \right)^2 / e_{kj} \right], \quad (8.2)$$

где e_{kj} , $k, j = 1, \dots, n$, — независимые случайные величины, не зависящие от величин ξ_k и имеющие распределения $P\{e_{kj} = 1\} = P\{e_{kj} = -1\} = 1/2$. Тогда (8.2) будет принимать минимальное значение, равное 1, тогда и только тогда, когда матрица (e_{ij}) будет ортогональной. Поэтому если при $n \equiv 0 \pmod{4}$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \left[(2n)! (n!)^{-1} - \left\{ \mathbf{M} \left((2n)! (n!)^{-1} - \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - n^{-n} \mathbf{M} \left[\prod_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n \xi_{jk} \varepsilon_{kj} \right)^2 / \varepsilon_{kj} \right] \right)^{2s} \right\}^{1/2s} \right] = 1,$$

то гипотеза Фреше верна, в противном случае не верна.

§ 9. Проблема Ляпунова для систем линейных стационарных уравнений со случайными коэффициентами

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами $\vec{dx}/dt = A_n \vec{x}$, $\vec{x}(0) = \vec{c}$. Если $\text{Re } \lambda_i < 0$, $i = 1, \dots, n$, где λ_i — собственные числа квадратной матрицы A_n , n -го порядка, то решение такого уравнения стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$ и любом конечном \vec{c} . Докажем следующее утверждение.

Теорема 9.1 [24]. Пусть A_n — случайная вещественная симметричная матрица с плотностью распределения $p(X)$. Тогда

$$P\{\lambda_i < 0, i = 1, \dots, n\} = c_1 \int p(-Z_{(n+1) \times n} Z'_{(n+1) \times n}) dZ_{(n+1) \times n}, \quad (9.1)$$

где $Z_{(n+1) \times n}$ — прямоугольная вещественная матрица размера $(n+1) \times n$,

$$c_1 = \pi^{-(n^2+3n)/4} \prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{n+2-i}{2}\right).$$

Доказательство. Очевидно, что

$$P\{\lambda_i < 0, i = 1, \dots, n\} = \int p(-Q) dQ, \quad (9.2)$$

где $Q = (q_{ij})$ — неотрицательно определенная матрица n -го порядка, и интегрирование ведется по множеству всех таких матриц. Преобразуем (9.2) к следующему виду

$$\int p(-Q) dQ = \int p[-(\sqrt{Q} H^{(n)}) (\sqrt{Q} H^{(n)})'] dQ \mu(dH),$$

где $H^{(n)}$ — ортогональная вещественная матрица размера $(n+1) \times n$, μ — нормированная мера Хаара на группе вещественных ортогональных матриц порядка $n+1$. Используя замену переменных $\sqrt{Q} H^{(n)} = Z_{(n+1) \times n}$, в силу формулы (1.1), получаем утверждение теоремы 9.1.

Следствие 9.1 [24]. Если элементы ξ_{ij} , $i > j$, $i, j = 1, \dots, n$, случайной матрицы A_n независимы и распределены по нормальным законам $N(a_{ij}, \sigma_{ij}^2)$, $\sigma_{ij} > 0$, то

$$P\{\lambda_i < 0, i = 1, \dots, n\} = c_1 (2\pi)^{-\frac{n(n+1)}{2}} \prod_{i>j} \sigma_{ij}^{-1} \int \exp\left\{-\sum_{i>j} (a_{ij} - \right.$$

$$-\sum_{k=1}^{n+1} z_{ik} z_{jk} \left. \right)^2 2^{-1} \sigma_{ij}^{-2} \left. \right\} \prod_{\substack{i=1, \dots, n \\ k=1, \dots, n+1}} dz_{ik}. \quad (9.3)$$

Интеграл, стоящий в правой части формулы (9.3), при $a_{ij} \equiv 0$ вычислен в работе [49] и равен некоторой степени гипердетерминанта матрицы с коэффициентами, зависящими от σ_{ij}^2 . В работах [32, 49] теорема 9.1 обобщена на несимметричные матрицы A_n , у которых существует совместная плотность элементов.

§ 10. Стохастический метод наименьших квадратов

Рассмотрим линейную модель множественной регрессии $\vec{y} = \vec{\Xi} \vec{\theta} + \vec{\varepsilon}$, где $\vec{y} = (y_1, \dots, y_n)$ — вектор наблюдений некоторой переменной, $\vec{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ — вектор ошибок наблюдений, $\vec{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_m)$ — вектор неизвестных параметров, $\vec{\Xi}$ — случайная матрица значений контролируемых переменных размерности $n \times m$, не зависящая от вектора $\vec{\varepsilon}$. Эта модель отличается от общепринятой тем, что элементы матрицы планируемых переменных $\vec{\Xi}$ являются случайными величинами [77].

Предположим, что $M\vec{\varepsilon} = 0$, $M\vec{\varepsilon} \vec{\varepsilon}' = R$, R — положительно определенная матрица. Тогда оценка вектора параметров $\vec{\theta}$, согласно методу наименьших квадратов, равна

$$\hat{\vec{\theta}} = \lim_{\delta \rightarrow 0} (\vec{\Xi}' R^{-1} \vec{\Xi} + I \delta)^{-1} \vec{\Xi}' R^{-1} \vec{y}.$$

Рассмотрим случай, когда с вероятностью 1 существует $(\vec{\Xi}' R^{-1} \vec{\Xi})^{-1}$. Оценка $\hat{\vec{\theta}}$ равна $\hat{\vec{\theta}} = (\vec{\Xi}' R^{-1} \vec{\Xi})^{-1} \vec{\Xi}' R^{-1} \vec{y}$. Эта оценка будет несмещенной, а ее ковариационная матрица $K = M(\vec{\Xi}' R^{-1} \vec{\Xi})^{-1}$. Не нарушая общности рассуждений, будем считать, что

$$K = M(\vec{\Xi} R_m^{-1} \vec{\Xi}')^{-1}, \quad (10.1)$$

где $\vec{\Xi} = (\xi_{ij})$ — случайная матрица размера $n \times m$, $i = 1, \dots, n$; $j = 1, \dots, m$.

Докажем следующее утверждение.

Теорема 10.1 [32]. Пусть y случайной матрицы $\vec{\Xi}$ существует плотность распределения $p(X)$, $R_m > 0$, $m \geq n$, и конечен интеграл

$$\int_{Z > 0} Z^{-1} p(\sqrt{Z} \vec{Z}_n H^{(n)} \sqrt{R_m}) \det Z^{(m-n)/2} dZ_\mu (dH), \quad (10.2)$$

где интегрирование ведется по множеству N неотрицательно определенных матриц Z n -го порядка, dZ — элемент лебеговой меры множества N , μ — нормированная мера Хаара на группе G

ортогональных m -мерных матриц, $H^{(n)} = (h_{ij})$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$.

Тогда $\|K\| < \infty$ и

$$K = c_{n,m} \det R_m^{n/2} \int_{Z>0} Z^{-1} p(\sqrt{Z} H^{(n)} \sqrt{R_m}) \times \\ \times \det Z^{(m-n-1)/2} dZ \mu(dH) \quad (10.3)$$

(константа $c_{n,m}$ определена в формуле (1.1)).

Доказательство. Очевидно, что $K = \int (XR_m^{-1}X')^{-1} \times \times p(X) dX$. После замены переменных $X = Y \sqrt{R_m}$ этот интеграл будет иметь вид $K = \int (YY')^{-1} p(Y \sqrt{R_m}) dY \det R_m^{n/2}$ (см. доказательство формулы (1.1)). Используя обобщенную плотность Уишарта, получаем (10.3). Если конечен интеграл (10.3), то $\|K\| < \infty$. Теорема 10.1 доказана.

Следствие 10.1 [32, 27]. Пусть задана случайная матрица \mathbb{E} , с вероятностью 1 $\text{Sp } \mathbb{E}' \leq c < \infty$, существует ограниченная плотность распределения $p(X)$ матрицы \mathbb{E} , $R > 0$ и $m > n + 2$. Тогда $\|K\| < \infty$.

Доказательство. Из формулы (10.2) вытекает

$$\int_{Z>0} \text{Sp } Z^{-1} p(\sqrt{Z} H^{(n)} \sqrt{R_m}) \det Z^{(m-n-1)/2} dZ \mu(dH) \leq \\ \leq c_1 \int_{\text{Sp } Z^2 < c} \text{Sp } Z^{-1} \det Z^{(m-n-1)/2} dZ \leq c_2 \int_{\text{Sp } Z^2 < c} \det Z^{-1/2} dZ = \\ = c_3 \int_{\text{Sp } X X' < c} dX < \infty,$$

где X — квадратная матрица порядка n .

Следствие 10.1 доказано.

Теорема 10.1 и следствие 10.1 справедливы для матриц $M(\mathbb{E}' R^{-1} \mathbb{E})^{-s}$, где $s \geq 1$ — целое число и

$$A = \left(\sum_{k=1}^m \int \xi_{ik}(x) \xi_{jk}(x) dF(x) \right)_{i,j=1,\dots,n},$$

где $\xi_{ij}(x)$ — действительные измеримые случайные процессы, $x \in (-\infty, \infty)$, $F(x)$ — некоторая функция распределения.

Заметим, что матрица A неотрицательно определена и

$$M \det A^{-s} \leq \int M \left\{ \det \left(\sum_{k=1}^m \xi_{ik}(x) \xi_{jk}(x) \right) \right\}^{-s} dF(x).$$

Если у случайной матрицы $\left(\sum_{k=1}^m \xi_{ik}(x) \xi_{jk}(x) \right)$ существует плот-

ность распределения для любого $x \in (-\infty, \infty)$, то, используя метод доказательства теоремы 10.1, получаем условие, когда существует $M \det A^{-s}$.

§ 11. Случайные детерминанты Фредгольма и управление спектром случайных линейных операторов в гильбертовом пространстве

Пусть (Ω, B, P) — вероятностное пространство, H — вещественное сепарабельное гильбертово пространство, \mathcal{h} — σ -алгебра борелевских множеств из H , (H, \mathcal{h}) — измеримое гильбертово пространство. Случайным оператором $A(\cdot, \omega)$, действующим в H и определенным на множестве неслучайных элементов $D \subset \mathcal{h}$, называется отображение $H \times \Omega$ в H , которое при каждом фиксированном $x \in D$ является измеримым отображением $\{\Omega, B\}$ в $\{H, \mathcal{h}\}$, т. е. для любого $D' \in \mathcal{h}$ $\{\omega: A(x, \omega) \in D'\} \in B$. Пусть D_H — линейное многообразие случайных элементов со значениями в измеримом пространстве $\{H, \mathcal{h}\}$. Если для любого $\xi \in D_H$ $\bar{A}(\xi(\omega), \omega)$ является случайным элементом со значениями в измеримом пространстве $\{H, \mathcal{h}\}$, то $\bar{A}(\cdot, \omega)$ — случайный оператор со случайной областью определения. Множество его значений имеет вид $R_{\bar{A}} = \{\bar{A}(\xi(\omega), \omega): \xi(\omega) \in D_H\}$.

Так как H — сепарабельное гильбертово пространство, то операторная норма ограниченного оператора $\bar{A}(\cdot, \omega)$ будет случайной величиной. Для ограниченного вполне непрерывного оператора $A(\cdot, \omega)$ его собственные числа и собственные функции можно выбрать так, чтобы они были соответственно случайными числами и случайными элементами в (H, \mathcal{h}) .

Лемма Шура. Пусть $\bar{A}(\cdot, \omega)$ — вполне непрерывный ограниченный оператор с областью определения $D_{\bar{A}}$. Тогда найдется ортонормированный базис $\{\varphi_j, j=1, 2, \dots\}$ (в общем случае случайный), в котором матрица оператора $\bar{A}(\cdot, \omega)$ имеет треугольный вид: $\bar{A}\varphi_j = a_{j1}\varphi_1 + a_{j2}\varphi_2 + \dots + a_{jj}\varphi_j, j=1, 2, \dots$, причем $a_{jj} = (A\varphi_j, \varphi_j) = \lambda_j(A), j=1, 2, \dots$, где $\lambda_j(\bar{A})$ — случайные собственные числа оператора $\bar{A}(\cdot, \omega)$.

Случайным детерминантом Фредгольма ядерного оператора $\bar{A}(\cdot, \omega)$ назовем выражение $\det(I - \mu \bar{A}(\cdot, \omega)) = \prod_j (1 - \mu \lambda_j(\bar{A}))$, где μ — произвольное комплексное число, $\lambda_j(\bar{A})$ — случайные собственные числа оператора $\bar{A}(\cdot, \omega)$, I — тождественный оператор.

Пусть $\bar{A}_1(\cdot), \bar{A}_2(\cdot)$ — ядерные операторы и $\varphi_n, n=1, 2, \dots$, — произвольный случайный нормированный базис пространства $D_{\bar{A}}$, тогда с вероятностью 1

$$\det(I - \tilde{A}_1(\cdot, \omega)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \det[\delta_{jk} - (\tilde{A}_1(\cdot, \omega) \Phi_j, \Phi_k)]_{j,k=1}^n; \quad (11.1)$$

$$\det[(I - \tilde{A}_1(\cdot, \omega))(I - \tilde{A}_2(\cdot, \omega))] = \det(I - \tilde{A}_1(\cdot, \omega)) \times \\ \times \det(I - \tilde{A}_2(\cdot, \omega)). \quad (11.2)$$

Доказательство (11.1) и (11.2) следует из работы [50].

Пусть \mathfrak{E}_p — класс всех вполне непрерывных случайных операторов в сепарабельном гильбертовом пространстве H , для которых

с вероятностью 1 $\sum_{i=1}^n s_i^p(A(\omega)) < \infty$, где $s_i(A(\omega))$ — сингулярные

случайные числа оператора $A(\omega)$, p — вещественное число. Одна из задач управления спектром дифференциальных и интегральных операторов со случайными параметрами формулируется следующим образом. Пусть $A(\omega)$, $B(\omega)$, $C(\omega)$ — случайные линейные операторы, действующие в H , $\sigma(A(\omega))$ — спектр оператора $A(\omega)$. Нужно найти оператор $C(\omega)$ такой, чтобы спектр $\sigma(A(\omega) + B(\omega)C(\omega))$ был заданным множеством.

Рассмотрим частный случай этой задачи, когда оператор $B(\omega)C(\omega)$ является одномерным: для любого $x \in H$ $B(\omega)C(\omega) \times x = (b(\omega), x)c(\omega)$, где $b(\omega)$ и $c(\omega)$ — измеримые случайные функции, реализации которых принадлежат пространству L_2 , $A(\omega)$ — случайный линейный оператор, действующий из $L_2(\Omega, B, P)$ в $L_2(\Omega, B, P)$ ($L_2(\Omega, B, P)$ — гильбертово пространство случайных функций $\xi(\omega, x)$, измеримых и квадратично интегрируемых).

Пусть $A(\omega)$ — самосопряженный линейный случайный оператор класса \mathfrak{E}_1 (т. е. ядерный), $\lambda_i(\omega)$, $i = 1, 2, \dots$, — его случайные собственные числа, $\Phi_i(\omega)$, $i = 1, 2, \dots$, — ортонормированные случайные собственные функции, выбранные единственным образом.

Теорема 11.1 [6]. Пусть с вероятностью 1

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k(\omega)| < \infty,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-2}(b(\omega), \Phi_k(\omega))^{-2} \prod_{s \neq k} \{(1 - \lambda_k^{-1}(\omega) \alpha_s(\omega))(1 - \lambda_k^{-1}(\omega) \lambda_s(\omega))^{-2}\} \times \\ \times (1 - \lambda_k^{-1}(\omega) \alpha_k(\omega))^2 < \infty,$$

где $\alpha_k(\omega)$, $k = 1, 2, \dots$, — случайные величины, среди которых есть комплексно-сопряженные пары.

Тогда $\sigma(A(\omega) + (c(\omega), \cdot)b(\omega)) = \{\alpha_k(\omega), k = 1, 2, \dots\}$, где

$$c(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k(\omega)(b(\omega), \Phi_k(\omega))^{-1} \Phi_k(\omega) \prod_{s \neq k} \{(1 - \lambda_k^{-1}(\omega) \alpha_s(\omega)) \times \\ \times (1 - \lambda_k^{-1}(\omega) \lambda_s(\omega))^{-1}\} (1 - \lambda_k^{-1}(\omega) \alpha_k(\omega)).$$

С помощью теоремы 11.1 в книге [32] рассмотрена следующая задача: пусть задана последовательность симметричных вещественных случайных матриц Ξ_n , $n=1, 2, \dots$, и случайных векторов \vec{b}_n , $n=1, 2, \dots$. Нужно выбрать такую последовательность случайных векторов \vec{c}_n , чтобы собственные числа матрицы $\Xi_n + \vec{b}_n \vec{c}_n^T$ стремились в смысле сходимости распределений к некоторым заданным случайным величинам.

§ 12. Центральная предельная теорема для случайных детерминантов

Пусть Ξ_n — последовательность вещественных квадратных случайных матриц n -го порядка. Центральной предельной теоремой для случайных детерминантов называется любое утверждение о том, что при некотором подборе постоянных a_n и b_n и некоторых условиях, налагаемых на элементы матрицы Ξ_n ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \{ b_n^{-1} [\ln |\det \Xi_n| - a_n] < x \} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-y^2/2} dy.$$

Выбор логарифмической функции в качестве нормирующей функции обосновывается тем, что $\ln |\det \Xi_n|$ равен сумме логарифмов модулей собственных чисел случайной матрицы Ξ_n , и этот факт подсказывает, что после соответствующей нормировки таких сумм можно получить центральную предельную теорему.

В настоящее время наметились три метода доказательства центральной предельной теоремы для случайных детерминантов: метод возмущений, метод ортогонализации и метод интегральных представлений. Метод возмущений основан на формуле

$$\ln |\det A| - \ln |\det B| = \ln |\det [I + B^{-1}(A - B)]|,$$

где A, B — квадратные матрицы, $\det A \neq 0$, $\det B \neq 0$. С его помощью в некоторых случаях $\ln |\det \Xi_n|$ можно представить в виде суммы слабо зависимых случайных величин, к которым можно применить центральную предельную теорему [32, стр. 137]. Метод ортогонализации основан на следующем хорошо известном результате (см. Введение к настоящему обзору): если элементы ξ_{ij} , $i, j=1, \dots, n$, случайной матрицы $\Xi_n = (\xi_{ij})$ независимы и имеют стандартное нормальное распределение $N(0, 1)$, то

$$\det \Xi_n^2 \approx \prod_{i=1}^n \sum_{j=1}^i \xi_{ij}^2. \quad (12.1)$$

Если Ξ_n — произвольная случайная матрица, то с помощью некоторых ортогональных преобразований, напоминающих преобразования, используемые при доказательстве (12.1), $\ln \det \Xi_n^2$ можно представить в виде суммы n случайных величин, к которым применяется центральная предельная теорема. В работе [38] с помощью метода ортогонализации доказано следующее утверждение.

Теорема 12.1. Пусть для каждого значения n случайные элементы матрицы $\Xi_n = (\xi_{ij})_{i,j=1}^n$ независимы, $M \xi_{ij}^{(n)} = 0$, $D \xi_{ij}^{(n)} = 1$, $M [\xi_{ij}^{(n)}]^4 = 3$, $i, j = 1, \dots, n$, и для некоторого $\delta > 0$

$$\sup_n \sup_{i,j=1,\dots,n} M |\xi_{ij}^{(n)}|^{4+\delta} < \infty. \quad (12.2)$$

Тогда [25]

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{\ln \det \Xi_n^2 - \ln (n-1)!}{\sqrt{2 \ln n}} < x \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-y^2/2} dy.$$

Заметим, что условие: $M [\xi_{ij}^{(n)}]^4 = 3$ в теореме 12.1, по-видимому, можно опустить (при этом нужно изменить нормирующие постоянные величины). Однако до сих пор эта задача не решена.

Теорема 12.2 [38]. Если в условиях теоремы 12.1 условие $M [\xi_{ij}^{(n)}]^4 = 3$ не требуется, то

$$p \lim_{n \rightarrow \infty} c_n^{-1} \ln \frac{\det \Xi_n}{n!} = 0, \quad (12.3)$$

где c_n — любая последовательность, удовлетворяющая условию

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n (\ln n)^{-1} = \infty.$$

Отметим, что доказательству утверждений типа (12.3) посвящено большое число работ (см. [92, 93, 98]).

Метод интегральных представлений основан на формуле

$$\det A^{-1/2} = \pi^{-n/2} \int \dots \int \exp(-Ax, x) \prod_{i=1}^n dx_i,$$

где A — положительно определенная матрица, $x = (x_1, \dots, x_n)$. С помощью этой формулы $\ln |\det A|$ можно свести к сумме слабо зависимых случайных величин, к которым также можно после некоторых преобразований применить центральную предельную теорему [20, 32].

Каждый из этих методов имеет свои преимущества и недостатки. Метод возмущений удобно применять тогда, когда существуют $M \Xi_n^{-2}$, $n = 1, 2, \dots$. Метод ортогонализации дает хорошие результаты, когда элементы случайных матриц Ξ_n независимы и принадлежат области притяжения нормального закона с пара-

метрами (0, 1). Метод интегральных представлений применяется в основном для детерминантов матриц $(I + \Xi_n)$ при условии, что

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} P \{ |\det(I + \Xi_n)| \geq h \} = 0.$$

С помощью этого метода в книге [32] доказана слабая сходимость распределений некоторых случайных детерминантов к безгранично делимому закону.

§ 13. О связи между сходимостью случайных детерминантов и сходимостью спектральных функций случайных матриц

Пусть Ξ_n — вещественные квадратные симметричные случайные матрицы и $\lambda_i, i=1, \dots, n$, — их собственные числа. Нормированной спектральной функцией матрицы Ξ_n называется выражение

$$\mu_n(x) = n^{-1} \sum_{k=1}^n F(x - \lambda_k),$$

где $F(y) = 1$ при $y > 0$ и $F(y) = 0$ при $y \leq 0$.

С помощью спектральных функций $\mu_n(x)$ для случайных детерминантов можно доказывать различные утверждения (см. [19, 31]). Например, в [32, стр. 224] доказана следующая

Теорема. Пусть конечномерные распределения случайных функций $\mu_n(x)$ сходятся к конечномерным распределениям некоторой случайной функции $\mu(x)$, для некоторого $\alpha > 0$ $\sup_n M \int \ln |x|^{1+\alpha} d\mu_n(x) < \infty$, $\mu_n(-\infty) \Rightarrow \mu(-\infty)$, $\mu_n(+\infty) \Rightarrow \mu(+\infty)$. Тогда $n^{-1} \ln |\det \Xi_n| \Rightarrow \int \ln |x| d\mu(x)$. Здесь \Rightarrow — символ слабой сходимости распределений. Наоборот, доказательство предельных теорем для $\mu_n(x)$ неразрывно связано с формулами возмущений для случайных детерминантов, а также с предельными теоремами для них. Предельные теоремы для $\mu_n(x)$ в большинстве случаев доказываются с помощью преобразования Стильеса

$$\begin{aligned} m(z) &= \int (x-z)^{-1} d\mu_n(x) = n^{-1} \text{Sp}(\Xi - Iz)^{-1} = \\ &= -\frac{\partial}{\partial z} n^{-1} \ln \det(\Xi - Iz), \end{aligned}$$

где $z = t + is, s \neq 0$ [30, 67]. Преобразование Стильеса $m(z)$ можно представить в виде суммы мартигал-разностей $m(z) =$

$$\begin{aligned} -Mm(z) &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \gamma_k, \quad [33, 35], \quad \text{где } \gamma_k = -M_{k-1} \frac{\partial}{\partial z} \ln \det(\Xi - Iz) + \\ &+ M_k \frac{\partial}{\partial z} \ln \det(\Xi - Iz), \quad M_k \text{ — условное математическое ожидание} \\ &\text{при фиксированной минимальной } \sigma\text{-алгебре событий, относительно} \end{aligned}$$

которой измеримы случайные векторы-строки матрицы Ξ , начиная с $k+1$ -го.

Одно из удивительных свойств детерминанта матрицы заключается в следующем [69]:

$$\begin{aligned} \ln \det (\Xi - Iz) - \ln \det (\Xi_k - Iz) &= \\ &= \ln [\xi_{kk} - z - ((\Xi_k - Iz)^{-1} \vec{\xi}_k, \vec{\xi}_k)], \end{aligned} \quad (13.1)$$

где матрица Ξ_k получена из матрицы Ξ_n заменой элементов k -ой строки и k -го столбца нулями, $\vec{\xi}_k = (\xi_{pk}, p \neq k, p=1, \dots, n)$. Используя (13.1), легко доказать, что $|\gamma_k| < c < \infty$ [69], что является решающим моментом при выводе следующего утверждения:

Теорема 13.1 [32 стр. 229]. Если для каждого n векторы $\vec{\xi}_i = (\xi_{ii}^{(n)}, \xi_{i,i+1}^{(n)}, \dots, \xi_{in}^{(n)})$, $i=1, \dots, n$, независимы, случайные величины $\xi_{ij}^{(n)}$, $i, j, n=1, 2, \dots$, заданы на одном вероятностном пространстве, существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} M \operatorname{Sp} (I + i + \Xi_n)^{-1} = m(t)$, и функция $m(t)$ непрерывна в нуле, то с вероятностью 1 $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(x) = \mu(x)$ в каждой точке непрерывности неслучайной спектральной функции $\mu(x)$, преобразование Стилтеса которой равно $\int (1 + itx)^{-1} d\mu(x) = m(t)$.

В некоторых случаях из сходимости распределений случайных детерминантов следует сходимость распределений случайных спектральных функций. Рассмотрим так называемое «логарифмическое преобразование»

$$n^{-1} \ln \det (Iz + \Xi) = \int \ln(z + x) d\mu_n(x), \quad \operatorname{Im} z \neq 0.$$

Для этого преобразования формула обращения в точках стохастической непрерывности $\mu_n(y)$ такова

$$P\{\mu_n(y) < u\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} P\{\operatorname{Im} n^{-1} \pi^{-1} \ln \det (I(-y + i\varepsilon) + \Xi) < u\}.$$

§ 14. Полуциркулярный закон Вигнера

Пусть $\Xi_n = (\xi_{ij}^{(n)})_{i,j=1}^n$ ($n=1, 2, \dots$) — симметрические случайные матрицы и $\mu_n(x)$ — их нормированные спектральные функции. Полуциркулярным законом будем называть любое утверждение о том, что $\mu_n(x)$ либо по вероятности, либо с вероятностью 1 стремится при $n \rightarrow \infty$ к неслучайной функции распределения, плотность которой равна

$$\mu'(x) = \begin{cases} (2\pi\sigma)^{-1} \sqrt{4\sigma^2 - x^2}, & |x| \leq 2\sigma, \\ 0, & |x| > 2\sigma, \sigma > 0. \end{cases}$$

Вигнер [104, 105] впервые доказал, что $\lim \mathbf{M}\mu_n(x) = \mu(x)$ при следующих предположениях: $\xi_{ij}^{(n)} = \eta_{ij} n^{-1/2}$, величины η_{ij} ($i \geq j$, $i, j = 1, 2, \dots$) независимы и симметричны, $\mathbf{M}\eta_{ij}^2 = \sigma^2$ и у величин существуют конечные моменты всех порядков. При этих же условиях Гренандер [50] доказал, что $p\text{-}\lim \mu_n(x) = \mu(x)$. Следующий шаг сделал Арнольд. В работе [79] при условиях, что величины η_{ij} , $i \geq j$ ($i, j = 1, 2, \dots$), независимы, $\mathbf{M}\eta_{ij}^2 < \infty$, $\mathbf{M}\eta_{ij}^4 < \infty$, $i \neq j$, $\mathbf{M}\eta_{ii} = 0$, он получил следующий результат: $p\text{-}\lim \mu_n(x) = \mu(x)$, если же дополнительно $\mathbf{M}\eta_{ii}^4 < \infty$ и $\mathbf{M}\eta_{ij}^6 < \infty$, $i \neq j$; то $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(x) = \mu(x)$ с вероятностью 1 [80].

Затем Мета в работе [94] на физическом уровне строгости с помощью теории возмущений линейных операторов доказал полукруговой закон при условиях, что элементы η_{ij} , $i \geq j$ ($i, j = 1, 2, \dots$) независимы, одинаково распределены и имеют конечные дисперсии.

Следующее существенное продвижение было сделано в работе Л. А. Пастура [68]. Он доказал, что $p\text{-}\lim \mu_n(x) = \mu(x)$, если величины η_{ij} , $i \geq j$ ($i, j = 1, 2, \dots$), независимы, $\mathbf{M}\eta_{ij} = 0$, $\mathbf{D}\eta_{ij} = \sigma^2$ и для всякого $\tau > 0$ и $j = 1, \dots, n$ выполняется условие Линдеберга:

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \int_{|x| > \tau} x^2 dP \{ \xi_{ij}^{(n)} < x \} = 0$. Л. А. Пастур впервые предложил использовать для доказательства полукругового закона преобразование Стильтеса и формулы возмущений для резольвент случайных матриц.

В работе [19] найдены необходимые и достаточные условия, при выполнении которых нормированная спектральная функция случайной матрицы сходится к полукруговому закону Вигнера.

Теорема [20, 26]. Если для каждого n случайные элементы $v_{ij}^{(n)}$, $i \geq j$ ($i, j = 1, \dots, n$), симметричной матрицы $\mathbb{E}_n = (v_{ij}^{(n)})$ независимы, заданы на одном вероятностном пространстве, $\mathbf{M}v_{ij}^{(n)} = 0$, $\mathbf{D}v_{ij}^{(n)} = \sigma^2 n^{-1}$, $0 < \sigma^2 < \infty$, то для того чтобы с вероятностью 1 $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(x) = \mu(x)$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие Линдеберга: для любого $\tau > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \sum_{i,j=1}^n \int_{|x| > \tau} x^2 dP \{ v_{ij}^{(n)} < x \} = 0.$$

В работе [20] доказана следующая центральная предельная теорема для преобразований Стильтеса спектральных функций случайных матриц, которая уточняет полукруговой закон.

Теорема [20]. Пусть для каждого значения n случайные элементы $\xi_{ij}^{(n)}$, $i \geq j$ ($i, j = 1, \dots, n$), симметричной матрицы $\mathbb{E}_n =$

$\approx (\xi_{ij}^{(n)})$ независимы, $M\xi_{ij}^{(n)} = 0$, $D\xi_{ij}^{(n)} = \sigma^2 n^{-1}$, $M[\xi_{ij}^2 - \sigma^2 n^{-1}]^2 = \approx d^2 n^{-2}$; для некоторого $\delta > 0$

$$\sup_n \sup_{k, p=1, \dots, n} M |\sqrt{n} \xi_{kp}^{(n)}|^{2+\delta} \leq c.$$

Тогда $\text{Sp}(I + it\Xi_n)^{-1} - M \text{Sp}(I + it\Xi_n)^{-1} \Rightarrow \xi(t) + i\eta(t) u\xi(t)$, $\eta(t) -$ независимые действительные гауссовские случайные функции с нулевыми средними и ковариационными функциями $R_\xi(t_1, t_2)$, $R_\eta(t_1, t_2)$.

Формулы для этих ковариационных функций можно найти в работе [20]. Доказательство этой теоремы основано на представлении разности $\text{Sp}(I + it\Xi_n)^{-1} - M \text{Sp}(I + it\Xi_n)^{-1}$ в виде суммы мартингал-разностей и использовании центральной предельной теоремы для таких сумм.

§ 15 V -преобразование спектральных функций

Для несамосопряженных случайных матриц H_n в общем случае применить предельные теоремы для преобразований Стилтеса не представляется возможным, так как интегралы $M \text{Sp}(Iz - H_n)^{-1}$, как правило, не существуют при всех z . Кроме того, формулы теории возмущений для резольвент $(Iz - H_n)^{-1}$, в силу вырождения резольвенты в некоторых точках z , нельзя применить в предельных теоремах. Именно с помощью предельных теорем для случайных детерминантов в работе [40] удалось разработать метод доказательства предельных теорем для спектральных функций несамосопряженных случайных матриц. Идея метода заключается в следующем.

Рассмотрим нормированные спектральные функции

$$v_n(x, y) = n^{-1} \sum_{k=1}^n \chi(\omega: \text{Re } \lambda_k < x, \text{Im } \lambda_k < y),$$

где λ_k — собственные числа комплексной случайной квадратной матрицы H_n n -го порядка

$$\mu_n(x, z) = n^{-1} \sum_{k=1}^n \chi(\omega: \lambda_k(z) < x),$$

где $\lambda_k(z)$ — собственные числа эрмитовой матрицы

$$(Iz - H_n)(Iz - H_n)^*, \quad z = t + is.$$

V -преобразованием спектральной функции $v_n(x, y)$ назовем следующее выражение:

$$\iint e^{ipx+iqy} dv_n(x, y) = (q^2 + p^2)(4iq\pi)^{-1} \iint (\partial/\partial s) \times \\ \times [\ln \det (Iz - H_n)(Iz - H_n)^*] e^{itp+isq} dt ds, \quad q \neq 0.$$

При доказательстве предельных теорем для $v(x, y)$ V -преобразование используется в следующем виде:

$$m_n(p, q) = \int \int \left[\int_{-c-x}^{c-x} \left[\int_{-(d+y)u^{-1}}^{(d-y)u^{-1}} \operatorname{sign} v(1+u^2)^{-1} e^{ipvu} du \right] e^{iqv} dv \right] \times \\ \times e^{ipx+iqv} dv_n(x, y) = \int_{-c}^c \left[\int_0^\infty \ln x d\mu_n(x, z) e^{isq} \Big|_{s=-d}^{s=d} - \right. \\ \left. - \int_{-d}^d \ln x d\mu_n(x, z) e^{isq} i q ds \right] e^{ip} dt,$$

где c, d — некоторые положительные постоянные.
Легко видеть, что если $q \neq 0$ и

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} M \int_{|x| < h, |y| < h} dv_n(x, y) = 1,$$

то

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \lim_{d \rightarrow \infty} \sup_n M \left| \int \int e^{ipx+iqv} dv_n(x, y) - m_n(p, q) \right| = 0.$$

Таким образом, зная предел величин $n^{-1} \ln |\det(Iz - H_n)|$, $n \rightarrow \infty$, можно найти предел спектральных функций $v_n(x, y)$.

§ 16. Круговой закон

В работе [43] с помощью V -преобразования и предельных теорем для случайных детерминантов доказано следующее утверждение, которое называется круговым законом.

Теорема 16.1 [41, 43]. Пусть для каждого значения n случайные элементы $\xi_{pl}^{(n)}$ ($p, l = 1, \dots, n$) комплексной матрицы $H_n = (\xi_{pl}^{(n)} n^{-1/2})$ независимы, $M \xi_{pl}^{(n)} = 0$, $M |\xi_{pl}^{(n)}|^2 = \sigma^2$, $0 < \sigma < \infty$, и у величин $\operatorname{Re} \xi_{kl}^{(n)}$, $\operatorname{Im} \xi_{kl}^{(n)}$ существуют плотности распределения $p_{kl}(x)$ и $q_{kl}(x)$, удовлетворяющие условию: для некоторого $\beta > 1$

$$\sup_n \sup_{k, l=1, \dots, n} \int [p_{kl}^\beta(x) + q_{kl}^\beta(x)] dx < \infty,$$

для некоторого $\delta > 0$ $\sup_n \sup_{k, l=1, \dots, n} M |\xi_{pl}^{(n)}|^{2+\delta} < \infty$. Тогда для любых x и y

$$p\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} v_n(x, y) = v(x, y), \text{ где } [\partial^2 v(x, y) / \partial x \partial y] = \sigma^{-2} \pi^{-1} \text{ при}$$

$$x^2 + y^2 < \sigma^2; \quad [\partial^2 v(x, y) / \partial x \partial y] = 0 \text{ при } x^2 + y^2 \geq \sigma^2,$$

$$v_n(x, y) = n^{-1} \sum_{k=1}^n \chi(\operatorname{Re} \lambda_k < x) \chi(\operatorname{Im} \lambda_k < y),$$

λ_k — собственные числа матрицы H_n . Отметим, что в частном случае для гауссовских комплексных матриц это утверждение было доказано в работе [94].

§ 17. Эллиптический закон

В этом параграфе сформулирована основная предельная теорема спектральной теории случайных матриц. В предыдущих параграфах были сформулированы два закона — полукруговой для симметричных случайных матриц и круговой для несимметричных случайных матриц с независимыми элементами. Оставалась нерешенной задача о нахождении предельной спектральной функции для случая, когда векторы (ξ_{pl}, ξ_{lp}) , $p \geq l$, $p, l = 1, \dots, n$, независимы, $M\xi_{pl}\xi_{lp} = \rho$, а остальные ограничения на элементы ξ_{pl} остаются такими же, как и в теореме 16.1. Оказалось, что с помощью V -преобразования для таких матриц можно найти плотность предельной спектральной функции, равной некоторой постоянной величине на области, граница которой является эллипсом. Точнее, справедливо следующее утверждение [45].

Теорема 17.1. Пусть для каждого значения $n = 1, 2, \dots$ случайные векторы $(\xi_{lp}^{(n)}, \xi_{pl}^{(n)})$, $p \geq l$, $p, l = 1, \dots, n$, стохастически независимы, заданы на одном вероятностном пространстве,

$$M\xi_{pl}^{(n)} = 0, \quad M|\xi_{pl}^{(n)}|^2 = n^{-1}, \quad M\xi_{pl}^{(n)}\xi_{lp}^{(n)} = n^{-1}\rho, \quad l \neq p, \quad 0 < |\rho| < 1,$$

у мнимых и вещественных частей случайных элементов $\xi_{pl}^{(n)}$, $\xi_{lp}^{(n)}$ случайной матрицы $H_n = (\xi_{pl}^{(n)})_{p,l=1}^n$ существуют совместные плотности распределения $p_{kl}^{(n)}(x_i, i=1, \dots, 4)$, удовлетворяющие условию: для некоторого $\beta > 1$

$$\sup_n \sup_{k,l=1,\dots,n} \int p_{kl}^{(n)}(x_i, i=1, \dots, 4) \prod_{i=1}^4 dx_i < \infty$$

и для некоторого $\delta > 0$

$$\sup_n \sup_{p,l=1,\dots,n} M|\xi_{pl}^{(n)}\sqrt{n}|^{2+\delta} < \infty.$$

Тогда для любых x и y с вероятностью 1

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n(x, y) = \lambda(x, y), \quad (17.1)$$

где $\frac{\partial^2 \lambda(x, y)}{\partial x \partial y} = \pi^{-1} [1 - (a^2 + b^2)^2]^{-1}$, если

$$\frac{(bx - ay)^2 (1 - a^2 - b^2)^{-2}}{a^2 + b^2} + \frac{(ax + by)^2 (1 + a^2 + b^2)^{-2}}{a^2 + b^2} < 1,$$

и $\frac{\partial^2 \lambda(x, y)}{\partial x \partial y} = 0$ в противном случае, $a = \operatorname{Re} \sqrt{\rho}$, $b = \operatorname{Im} \sqrt{\rho}$.

Легко видеть, что из формулы (17.1), в частности, вытекают полукруговой (при $\rho \rightarrow 1$) и круговой (при $\rho \rightarrow 0$) законы.

§ 18. Осцилляционная теорема Штурма

Для того, чтобы найти предельные спектральные функции случайных матриц, нужно уметь обращать преобразование Стильтеса, что является далеко не простым делом. Иногда можно обойтись без обращения преобразования Стильтеса, если воспользоваться осцилляционной теоремой Штурма: пусть A_n — симметричная вещественная матрица n -го порядка и $\det A_i, i=0, \dots, n$, ($\det A_0=1$) — последовательность ее главных миноров, не равных нулю. Тогда число отрицательных собственных чисел матрицы A равно числу перемен знака в последовательности $\det A_i, i=0, \dots, n$. Используя это утверждение, получаем следующее: пусть $\Xi_n = (\xi_{ij}^{(n)})$ — случайные вещественные симметричные матрицы n -го порядка, $\det \Xi_i, i=0, \dots, n$, ($\det \Xi_0=1$) — ее главные миноры, $\mu_n(x)$ — нормированная спектральная функция матрицы Ξ_n , с вероятностью 1 $\det \Xi_i \neq 0$. Тогда с вероятностью 1 [99, 31]

$$\mu_n(x) = (2n)^{-1} \sum_{i=1}^n (1 - \text{sign}(\det(\Xi_{i-1} - Ix) / \det(\Xi_i - Ix))).$$

С помощью этого уравнения в работе [32, стр. 297] доказаны предельные теоремы для спектральных функций случайных матриц Якоби.

§ 19. Закон арктангенса

Функции распределения решений системы линейных алгебраических уравнений $\vec{\Xi}_n \vec{x}_n = \vec{\eta}_n$ в общем случае имеют громоздкий вид, порядок таких систем высок, поэтому представляется целесообразным изучение асимптотического поведения решений при возрастании порядка системы до бесконечности [1, 8, 9]. В этом параграфе приведены предельные теоремы общего вида для решений систем $\vec{\Xi}_n \vec{x}_n = \vec{\eta}_n$, коэффициенты которых являются независимыми случайными величинами [11, 16, 22, 34].

Рассмотрим системы линейных случайных алгебраических уравнений $\vec{\Xi}_n \vec{x}_n = \vec{\eta}_n$, где $\vec{\Xi}_n = (\xi_{ij}^{(n)})$ — действительная случайная квадратная матрица n -го порядка, $\vec{\eta}_n = (\eta_1, \dots, \eta_n)$ — случайный вектор. Пусть Ξ_{ij} — алгебраическое дополнение элемента ξ_{ij} . Если $\det \vec{\Xi}_n \neq 0$, то решение такой системы существует и равно $\vec{x}_n = \vec{\Xi}_n^{-1} \vec{\eta}_n$; если $\det \vec{\Xi}_n = 0$, то решение может не существовать. Будем предполагать, что компоненты $x_k^{(n)}$ вектора \vec{x}_n равны ∞ , если $\det \vec{\Xi}_n = 0$.

Теорема 19.1. [32]. Пусть для каждого значения n случайные величины $\xi_{ij}, \eta_i, i, j=1, \dots, n$, независимы, $M\xi_{ij}=0$,

$M\eta_{li} = 0$, $D\xi_{ij} = D\eta_{ij} = \sigma^2$, $0 < \sigma^2 < \infty$, $i, j = 1, \dots, n$, для некоторого $\delta > 0$ $\sup_{n, i, j} M [|\xi_{ij}|^{4+\delta} + |\eta_{ij}|^{4+\delta}] < \infty$. Тогда для любых $k \neq l$, $k, l = 1, \dots, n$,

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} P \{x_{i_1}^{(n)} < y_1, \dots, x_{i_k}^{(n)} < y_k\} = \\ & = \pi^{-(k+1)/2} \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right) \int_{-\infty}^{y_1} \dots \int_{-\infty}^{y_k} (1+z_1^2 + \dots + z_k^2)^{-\frac{k+1}{2}} \prod_{i=1}^k dz_i, \\ & \lim_{n \rightarrow \infty} P \{x_k^{(n)} < z\} = 1/2 + \pi^{-1} \arctg z, \end{aligned}$$

где i_1, \dots, i_k — любые различные целые числа от 1 до n .

§ 20. Случайные детерминанты Фредгольма

Пусть Ξ_n — квадратная случайная матрица. Случайным детерминантом Фредгольма такой матрицы будем называть случайную функцию $\det(I + t\Xi_n)$, где t — действительная или комплексная переменная. Случайные детерминанты Фредгольма несут важную информацию о случайных матрицах. С их помощью можно найти предельные распределения для собственных чисел случайных матриц. На основании предельных теорем для случайных детерминантов Фредгольма можно доказать предельные теоремы для собственных чисел симметричных и несимметричных случайных матриц, а также линейных случайных операторов в гильбертовом пространстве.

Изложим кратко схему доказательства предельных теорем для собственных чисел случайных матриц. Пусть $\Xi_n = (\xi_{ij})$ — квадратная случайная матрица n -го порядка и λ_i ($i = 1, \dots, n$) — ее собственные числа, упорядоченные в порядке возрастания их модулей. Для упрощения формул будем считать, что собственные числа λ_i ($i = 1, \dots, n$) различны. Для λ_i справедливы формулы:

$$\begin{cases} \lambda_1 = \text{Sp } \Xi_n^s (\text{Sp } \Xi_n^{s-1})^{-1} + \varepsilon_s, \\ \lambda_2 = (\text{Sp } \Xi_n^s - \lambda_1^s) (\text{Sp } \Xi_n^{s-1} - \lambda_1^{s-1})^{-1} + \delta_s, \end{cases} \quad (20.1)$$

где $\varepsilon_s \rightarrow 0$ и $\delta_s \rightarrow 0$ при $s \rightarrow \infty$.

Если мы предположим, что

$$\overline{\lim}_{h \rightarrow \infty} \sup_n P \{ \text{Sp } \Xi_n \Xi_n^* \geq h \} = 0, \quad (20.2)$$

то в формулах (20.1) можно положить

$$\overline{\lim}_{s \rightarrow \infty} p\text{-}\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \| \varepsilon_s + \delta_s \| = 0.$$

В силу этого соотношения для изучения предельных теорем для собственных чисел λ_i нужны предельные теоремы для распреде-

лений случайных векторов $(\text{Sp } \Xi_n^s, \text{Sp } \Xi_n^{s-1})$ для любого фиксированного целого $s > 0$. Отметим, что для симметричных случайных матриц формулы (20.1) справедливы также и в том случае, когда собственные числа λ_i кратные.

Изучение распределений величин $\text{Sp } \Xi_n^s$ представляет собой весьма сложную задачу, но при выполнении условия (20.2) ее можно свести к изучению некоторых сумм условно независимых случайных величин. Если Ξ_n — симметричные матрицы, то

$$\text{Sp } \Xi_n^s = i^{-s} [(s-1)!]^{-1} (\partial^s / \partial t^s) \ln \det (I + it \Xi_n)_{t=0} (-1)^{s+1}. \quad (20.3)$$

Для $\det (I + it \Xi_n)$ имеем интегральное представление

$$\det (I + it \Xi_n)^{-1} = [\mathbf{M} \exp (-it (\Xi_n \vec{\xi}_{n1}, \vec{\xi}_{n1}) / \Xi_n)]^s, \quad (20.4)$$

где $\vec{\xi}_n$ — случайный вектор, не зависящий от матрицы Ξ_n и распределенный по нормальному закону $N(0, 0, 5I)$.

В силу (20.4) выражение (20.3) будет равно

$$\begin{aligned} \text{Sp } \Xi_n^s = \mathbf{M} [\Phi (\exp (-it (\Xi_n \vec{\xi}_{n1}, \vec{\xi}_{n1}), (\Xi_n \vec{\xi}_{n1}, \vec{\xi}_{n1})) \times \\ \times [\mathbf{M} \exp (-it (\Xi_n \vec{\xi}_{n1}, \vec{\xi}_{n1}))]^{-s} / \Xi_n], \end{aligned} \quad (20.5)$$

где Φ — некоторая полиномиальная функция.

Рассматривая теперь моменты

$$\mathbf{M} \Phi^m [\mathbf{M} \exp (-it (\Xi_n \vec{\xi}_{n1}, \vec{\xi}_{n1}))]^l \quad (m, l = 1, 2, \dots),$$

задачу нахождения распределений $\text{Sp } \Xi_n^s$ можно свести к нахождению распределений случайных величин $(\Xi_n \vec{\xi}_{nk}, \vec{\xi}_{nk})$ ($k = 1, 2, \dots$), где $\vec{\xi}_{nk}$ — независимые случайные векторы, не зависящие от матрицы Ξ_n и распределенные по нормальному закону $N(0, 0, 5I)$. Если распределения случайных величин $(\Xi_n \vec{\xi}_{nk}, \vec{\xi}_{nk})$ сближаются с распределениями величин $(H_n \vec{\xi}_{nk}, \vec{\xi}_{nk})$, где H_n — некоторые случайные матрицы, то при некоторых условиях легко вывести, что $\lambda_1(\Xi_n) \sim \lambda_1(H_n)$, где символ \sim означает, что почти для всех x

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [\mathbf{P} \{\lambda_1(\Xi_n) < x\} - \mathbf{P} \{\lambda_1(H_n) < x\}] = 0.$$

Для несимметричных случайных матриц Ξ_n нужно пользоваться интегральными представлениями следующего вида

$$\begin{aligned} \det (I + \alpha_t \Xi_n)^{-1} = \mathbf{M} [\exp \{i \alpha_t ((\Xi_n - \Xi'_n) \vec{\xi}, \vec{\eta}) - \alpha_t (\Xi_n \vec{\xi}, \vec{\xi}) - \\ - \alpha_t (\Xi'_n \vec{\eta}, \vec{\eta})\} / \Xi_n], \end{aligned}$$

где

$$\alpha_t = t [q + 0,5 | \text{Sp } (\Xi + \Xi') | + 0,25 \text{Sp } (\Xi + \Xi')^2]^{-1},$$

$0 \leq t < 1$, $q > 1$, $\vec{\xi}$, $\vec{\eta}$ — независимые случайные векторы, распределенные по нормальному закону $N(0, 0, 5I)$ и не зависящие от матрицы E_n .

Пусть E_n — квадратные случайные матрицы n -го порядка. Упорядочим собственные числа матрицы $E_n E_n'$ в невозрастающем порядке $\lambda_{1n} \geq \lambda_{2n} \geq \dots \geq \lambda_{nn}$. Рассмотрим случайный процесс $\lambda_n(x)$, равный сумме собственных чисел, попавших в полуинтервал $[0, x)$. Если с вероятностью 1 $\text{Sp } E_n E_n' < \infty$, то

$$\int_0^\infty (1+tx)^{-1} d\lambda_n(x) = (d/dt) \ln \det(I + tE_n E_n') := \eta_n(t), \quad t \geq 0.$$

Таким образом, изучение предельных теорем для спектральных функций $\lambda_n(x)$ можно свести к изучению предельных теорем для случайных детерминантов.

Назовем случайные векторы $\vec{\xi}_{nk}$ ($k=1, \dots, n$, $n=1, 2, \dots$) предельно постоянными, если найдутся такие постоянные векторы \vec{a}_{nk} , что для всякого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k=1, \dots, n} \mathbf{P} \{ (\vec{\xi}_{nk} - \vec{a}_{nk}, \vec{\xi}_{nk} - \vec{a}_{nk}) \geq \varepsilon \} = 0.$$

Случайные векторы $\vec{\xi}_{nk} - \vec{a}_{nk}$, удовлетворяющие этому условию, будем называть бесконечно малыми.

Теорема 20.1 [20]. Если

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \{ \lambda_n(+\infty) \geq h \} = 0,$$

то для того, чтобы $\lambda_n(x) \rightsquigarrow \lambda(x)$, $x \geq 0$, где $\lambda(x)$ — некоторая случайная функция, неубывающая и ограниченной вариации с вероятностью 1, необходимо и достаточно, чтобы $\eta_n(t) \Rightarrow \eta(t)$, где $\eta(t)$ — некоторая случайная функция, $t \geq 0$.

Теорема 20.2 [20]. Если

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \{ \lambda_n(+\infty) \geq h \} = 0$$

и $\eta_n(t) \sim \zeta_n(t)$, $t \geq 0$, где $\zeta_n(t) = \int_0^\infty (1+tx)^{-1} d\mu_n(x)$, $\mu_n(x)$ — некоторая случайная функция, неубывающая и ограниченной вариации с вероятностью 1, то почти для всех значений $x > 0$ $\lambda_n(x) \sim \mu_n(x)$.

Теорема 20.3 [20]. Если для каждого значения n случайные элементы $\xi_{ij}^{(n)}$ ($i, j=1, \dots, n$) матриц $E_n = (\xi_{ij}^{(n)})$ независимы, предельно постоянны

$$\lim_{h \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \{ \text{Sp } EE' > h \} = 0,$$

то почти для всех значений x $\lambda_n(x) \sim \mu_n(x)$, $x \geq 0$, где $\mu_n(x)$ — неубывающий случайный процесс, преобразование Стильтьеса которого равно

$$\int_0^{\infty} (1+tx)^{-1} d\mu_n(x) = \\ = (d/dt) \ln \det [(I + t\Lambda_{1n})\{I + t\Lambda_{2n} + tB_n(I + t\Lambda_{1n})^{-1}B'_n\}],$$

где

$$\Lambda_{1n} = \left(\delta_{ij} \sum_{i \in T_{jn}} v_{ij}^2 \right), \quad \Lambda_{2n} = \left(\delta_{ij} \sum_{i \in K_{in}} v_{ij}^2 \right), \quad t \geq 0, \quad B_n = (b_{ij}),$$

$v_{ij} = \xi_{ij} - a_{ij} - M(\xi_{ij} - a_{ij}) \chi(|\xi_{ij} - a_{ij}| < \tau)$, $\tau > 0$, $b_{ij} = \xi_{ij} - v_{ij}$, a_{ij} — неслучайные числа, удовлетворяющие соотношению: для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{i, j=1, \dots, n} P\{|\xi_{ij} - a_{ij}| > \varepsilon\} = 0.$$

Множества T_{jn} и K_{in} определены следующим образом: множество $L_n = \{v_{ij}, i, j=1, \dots, n\}$ разбивается на $2n$ непересекающихся множеств R'_{in}, R''_{in} , содержащих, соответственно, элементы только i -й вектор-строки и i -го вектор-столбца матрицы Ξ_n , так что векторы $\vec{\mu}_i$, составленные из элементов каждого множества, будут бесконечно малы. Через T_{jn} обозначим множество значений индекса i величин $v_{ij} \in \bigcup_{p=1}^n R'_{pn}$, у которых второй индекс равен j , а через K_{in} — множество значений индекса j величин $v_{ij} \in \bigcup_{p=1}^n R''_{np}$, у которых первый индекс равен i .

Следствие 20.1. Если а) дополнительно к условиям теоремы 20.3 $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Sp } B_n B'_n = 0$, то для любых целых чисел $k_1 > k_2 > \dots > k_m$

$$\{\lambda_{k_1 n}, \lambda_{k_2 n}, \dots, \lambda_{k_m n}\} \sim \{\mu_{k_1 n}, \mu_{k_2 n}, \dots, \mu_{k_m n}\},$$

где $\mu_{1n} \geq \dots \geq \mu_{2nn}$ — упорядоченные в возрастающем порядке величины $\sum_{i \in T_{jn}} v_{ij}^2$; $\sum_{i \in K_{jn}} v_{ij}^2$; б) дополнительно к условиям теоремы 20.3 вектор-строки и вектор-столбцы матрицы Ξ_n предельно постоянны, то для любых целых чисел $k_1 > k_2 > \dots > k_m$

$$\{\lambda_{k_1 n}, \lambda_{k_2 n}, \dots, \lambda_{k_m n}\} \sim \{\theta_{k_1 n}, \theta_{k_2 n}, \dots, \theta_{k_m n}\},$$

где $\theta_{1n} \geq \dots \geq \theta_{n^2+n, n}$ — упорядоченные в возрастающем порядке величины v_{ij}^2 ($i, j=1, \dots, n$), β_{in} ($i=1, \dots, n$), β_{in} — собственные числа матрицы $B_n B'_n$.

Упорядочим собственные числа матрицы Ξ_n в порядке возрастания их модулей $|\lambda_{1n}| \geq \dots \geq |\lambda_{nn}|$. Если модули некоторых собственных чисел совпадают, то их упорядочиваем в порядке возрастания аргумента.

Пусть $\Xi_n = (\xi_{ij}^{(n)})$ — случайные матрицы n -го порядка,

$$v_{ij}^{(n)} = \xi_{ij}^{(n)} - a_{ij}^{(n)} - \rho_{ij}^{(n)}, \quad \rho_{ij}^{(n)} = \int_{|x| < \tau} x dF_{ij}(x + a_{ij}^{(n)}), \quad \tau > 0,$$

$$F_{ij}^{(n)}(x) = P\{\xi_{ij}^{(n)} < x\}.$$

Из величин $b_{ij}^{(n)} = \rho_{ij}^{(n)} + a_{ij}^{(n)}$ составим квадратную матрицу $B_n = (b_{ij}^{(n)})$.

Теорема 20.4 [20]. Если для каждого n векторы $(\xi_{ij}^{(n)}, \xi_{ji}^{(n)})$, $i \geq j$, $i, j = 1, \dots, n$, независимы, векторы-строки и векторы-столбцы матрицы Ξ_n предельно постоянны,

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \sum_{i=1}^n v_{ii}^{(n)} \right| + \sum_{i,j=1}^n (v_{ij}^{(n)})^2 \geq h \right\} = 0,$$

$$\sup_n [|\text{Sp } B_n| + \text{Sp } B_n B_n'] < \infty,$$

то для любых целых чисел $k_1 > k_2 > \dots > k_m$ [31]

$$\{\lambda_{k_1}, \dots, \lambda_{k_m}\} \sim \{\mu_{k_1}, \dots, \mu_{k_m}\},$$

где μ_i ($i = 1, \dots, n^2 + n$) — упорядоченные в порядке возрастания модуля (или аргумента, если модули чисел совпадают) случайные величины β_p, v_{pp} ($p = 1, \dots, n$),

$$|v_{p'l} v_{l'p}|^{1/2} i^{(1 - \text{sgn} v_{p'l} v_{l'p})/2}, \quad -|v_{p'l} v_{l'p}|^{1/2} i^{(1 - \text{sgn} v_{p'l} v_{l'p})/2}, \quad p > l,$$

где β_p ($p = 1, \dots, n$) — собственные числа матрицы B_n , m — целое число, не зависящие от n .

Из теоремы 20.4, в частности, мы получаем следующие утверждения: если с вероятностью 1 $v_{ij} v_{ji} > 0$ ($i, j = 1, \dots, n$), то $p\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Im } \lambda_{in} = 0$ ($i = 1, \dots, n$), если

$$v_{ij} v_{ji} < 0 \quad (i, j = 1, \dots, n), \quad p\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (|\beta_i| + |v_{ii}|) = 0,$$

то $p\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Re } \lambda_{in} = 0$ ($i = 1, \dots, n$).

§ 21. Элементы G-анализа

В этом параграфе рассмотрен метод состоятельного и асимптотически нормального оценивания некоторых функций ковариационных матриц $\Phi(R_{m_n})$ при больших размерностях m_n наблюдаемых векторов. Ранее, в большинстве случаев для оценок $\Phi(R_{m_n})$,

где \hat{R}_{m_n} — эмпирическая ковариационная матрица, требовалось настолько много наблюдений n , что возникло сомнение в полезности многомерного статистического анализа для решения практических задач при больших значениях m_n . Эти сомнения частично были развеяны после появления работ [2, 53, 55, 62], в которых были найдены поправки к оценкам $\Phi(\hat{R}_{m_n})$ при выполнении условия А. Н. Колмогорова: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m_n}{n} = c$, $0 < c < \infty$. После долгих лет исследований казалось, что при выполнении условия А. Н. Колмогорова не существует состоятельных и асимптотически нормальных оценок функций $\Phi(R_{m_n})$. Однако благодаря развитой спектральной теории матриц [20, 32], для некоторых функций Φ при выполнении G -условия $\lim_{n \rightarrow \infty} f(m_n)n^{-1} < \infty$ удалось установить, что

$$p \lim_{n \rightarrow \infty} [\Phi(\hat{R}_{m_n}) - \psi(R_{m_n})] = 0, \quad (21.1)$$

где ψ — некоторая известная измеримая функция элементов матрицы R_{m_n} . Это и есть основное утверждение, составляющее основу G -анализа наблюдений большой размерности. Для доказательства (21.1), как правило, используются предельные теоремы для сумм мартингал-разностей и формулы возмущений для резольвент случайных матриц, что составляет теоретическую часть G -анализа [42, 44].

Используя уравнение (21.1), можно найти такую измеримую функцию $G(\hat{R}_{m_n})$ (G -оценку), что

$$p \lim_{n \rightarrow \infty} [G(\hat{R}_{m_n}) - \Phi(R_{m_n})] = 0, \text{ либо } [G(\hat{R}_{m_n}) - \Phi(R_{m_n})] \sqrt{c_n} \Rightarrow N(0, 1),$$

где c_n — некоторая последовательность чисел. В работе [44] показано, что оценка погрешности G -оценок некоторых функций $\Phi(R_{m_n})$ эквивалентна $(m_n n)^{-1/2}$, в то время как оценки $\Phi(\hat{R}_{m_n})$ имеют погрешность, эквивалентную $m_n n^{-1/2}$.

1. G_1 -оценка обобщенной дисперсии. Пусть даны независимые наблюдения x_1, \dots, x_n над m_n -мерным случайным вектором ξ , $n > m_n$. Обобщенной дисперсией наблюдений x_1, \dots, x_n называется выражение $\det \bar{R}$, где

$$\bar{R} = (n-1)^{-1} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})(x_k - \bar{x})', \quad \bar{x} = n^{-1} \sum_{k=1}^n x_k.$$

Если векторы x_i , $i=1, \dots, n$, независимы и распределены по многомерному нормальному закону $N(a, R)$, то $\det \bar{R} \approx \det R (n-1)^{-m} \prod_{i=1}^n \chi_i^2$, где χ_i^2 — независимые случайные вели-

чины, распределенные по χ^2 -закону с i степенями свободы. В общем случае распределение $\det \hat{R}$ имеет громоздкий вид, поэтому нахождение G_1 -оценок для величин $\det R$ представляет собой весьма сложную задачу. В работе [38] доказано, что при некоторых условиях в качестве G_1 -оценок для величин $\ln \det R c_n^{-1}$, где c_n — последовательность постоянных такая, что $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n^{-2} \ln \frac{n}{n-m_n} = 0$, можно взять оценку [44]

$$G_1(\hat{R}) := c_n^{-1} \left\{ \ln \det \hat{R} + \ln [(n-1)^m (A_{n-1}^m)^{-1}] + \ln \frac{n}{n-m_n} \right\},$$

где $A_n^m = n(n-1) \dots (n-m+1)$.

Теорема 21.1. Пусть случайные m_n -мерные векторы $x_1^{(n)}, \dots, x_n^{(n)}$ для каждого значения $n > m_n$ независимы, одинаково распределены с вектором средних a и невырожденной ковариационной матрицей R_{m_n} , для некоторого $\delta > 0$

$$\sup_n \sup_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, m_n}} M | \tilde{x}_{ij}^{(n)} |^{4+\delta} < \infty,$$

где $\tilde{x}_{ij}^{(n)}$ — компоненты вектора $\tilde{x}_i = R_{m_n}^{-1/2} (x_i^{(n)} - a)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n - m_n) = \infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{m_n} = 1$$

и для каждого значения $n > m_n$ случайные величины $\tilde{x}_{ij}^{(n)}$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m_n$ независимы. Тогда

$$p \lim_{n \rightarrow \infty} [G_1(\hat{R}_{m_n}) - c_n^{-1} \ln \det R_{m_n}] = 0.$$

Если дополнительно к предыдущим условиям

$$M (x_{ij}^{(n)})^4 = 3, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m_n,$$

то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{c_n G_1(\hat{R}) - \ln \det R_{m_n}}{\sqrt{2 \ln \frac{n}{n-m_n}}} < x \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-y^2/2} dy.$$

2. G_2 -оценка следа резольвенты ковариационной матрицы. Рассмотрим основную задачу G -анализа — задачу оценивания преобразований Стилтеса нормированных спектральных функций

$\mu_{m_n}(x) = m_n^{-1} \sum_{k=1}^{m_n} \chi(\lambda_k < x)$ ковариационных матриц R_{m_n} по наблюдениям x_1, \dots, x_n над случайным вектором ξ с ковариационной матрицей R_{m_n} , где λ_k — собственные числа матрицы R_{m_n} . Отметим, что многие аналитические функции от ковариационных матриц, которые используются в многомерном статистическом анализе,

можно выразить через спектральные функции $\mu_{m_n}(x)$. Например,

$$m_n^{-1} \text{Sp } f(R_{m_n}) = \int_0^{\infty} f(x) d\mu_{m_n}(x),$$

где f — аналитическая функция.

Преобразованием Стильтеса функции $\mu_{m_n}(x)$ называется выражение

$$\Phi(t, R_{m_n}) = \int_0^{\infty} (1+tx)^{-1} d\mu_{m_n}(x) = m_n^{-1} \text{Sp } (I + tR_{m_n})^{-1}, \quad t \geq 0,$$

G -оценкой преобразования Стильтеса $\Phi(t, R_{m_n})$ назовем следующее выражение

$$G_2(t, \bar{R}_{m_n}) = \Phi(\bar{\theta}_n(t), \bar{R}_{m_n}),$$

где $\bar{\theta}_n(t)$ — решение уравнения

$$\theta \left(1 - \frac{m_n}{n-1} + \frac{m_n}{n-1} \Phi(\theta, \bar{R}_{m_n}) \right) = t. \quad (21.2)$$

Очевидно, что положительное решение уравнения (21.2) при $t \geq 0$ существует и единственно. Из результатов работ [20, 32, 44] вытекает следующее утверждение.

Теорема 21.2. Пусть заданы независимые наблюдения x_1, x_2, \dots, x_n над m_n -мерным случайным вектором ξ , выполняется G -условие:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} m_n n^{-1} < 1,$$

$$0 < c_1 \leq \lambda_i \leq c_2 < \infty, \quad i = 1, \dots, m_n,$$

компоненты вектора $\eta_k := (\eta_{1k}, \dots, \eta_{m_n k}) = R_{m_n}^{-1/2} (\xi - M\xi_k)$ независимы и

$$\sup_n \sup_{k=1, \dots, n} \sup_{i=1, \dots, m_n} M |\eta_{ik}|^{4+\delta} < \infty, \quad \delta > 0.$$

Тогда при $t > 0$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P \{ [G_2(t, \bar{R}_{m_n}) - \Phi(t, R_{m_n})] \sqrt{(n-1)m_n} a_n(t) + \\ + c_n(t) < x \} = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^x e^{-y^2/2} dy, \end{aligned}$$

где

$$a_n(t) = q_1^{-1}(t) q_2^{-1}(t),$$

$$q_1(t) = 1 - \frac{M\bar{\Phi}'(\theta_n) k_n \theta_n}{1 - k_n + k_n \theta_n M\bar{\Phi}'(\theta_n) + k_n M\bar{\Phi}(\theta_n)},$$

$$q_2(t) = \left[m_n^{-1} \text{Sp } A^2 + 3m_n^{-1} \sum_{i=1}^{m_n} a_{ii}^2 \right]^{-1/2},$$

$$A = (a_{ij}) = \left[1 + \frac{\theta_n}{n-1} \mathbf{M} \text{Sp } SR_{m_n} \right]^{-1} \theta_n S^2 R_{m_n} + \\ + \theta_n SR_{m_n} \theta_n \mathbf{M} (n-1)^{-1} \text{Sp } S^2 R_{m_n} \left[1 + \frac{\theta_n}{n-1} \mathbf{M} \text{Sp } SR_{m_n} \right]^{-2},$$

$$S = (I + \theta_n Q)^{-1}, \quad k_n = \frac{m_n}{n-1},$$

θ_n — решение уравнения $\theta_n (1 - k_n + k_n \mathbf{M} \hat{\Phi}(\theta_n)) = t$,

$$\hat{\Phi}(\theta_n) = m_n^{-1} \text{Sp } S,$$

$$Q = (n-1)^{-1} \sum_{k=1}^n (x_k - \mathbf{M} x_k)(x_k - \mathbf{M} x_k)',$$

$$c_n(t) = -a_n(t) \frac{\theta_n \frac{\mathbf{M}(S\eta, \eta)}{\sqrt{(n-1)m_n}}}{1 - \frac{\theta_n}{n-1} \mathbf{M}(S\eta, \eta)} q_1(t) +$$

$$+ \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{m_n}} \sum_{p=1}^{m_n} \left\{ -[1 + \lambda_p t]^{-3} \mathbf{M} \varepsilon_{2p}^2 + [1 + \lambda_p t]^{-2} \mathbf{M} \varepsilon_{2p} \right\},$$

$$\eta = \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \mathbf{M} x_i)}{\sqrt{n}},$$

$$\varepsilon_{2p} = \theta_n \left\{ \sum_{l=1}^n [b_{pl}^2 - \lambda_p] \right\} - \theta_n^2 \left\{ (B'_p \Gamma_p B_p b_p, b_p) - \frac{\lambda_p}{n-1} \text{Sp } R_p B_p B'_p \right\} + \\ + \theta_n \lambda_p [m_n^{-1} \text{Sp } \Gamma_p - \mathbf{M} \hat{\Phi}(\theta_n)],$$

B_p — матрица, полученная вычеркиванием p -ой строки матрицы $B = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) (n-1)^{-1/2}$, $\xi_i = \sqrt{\Lambda_{m_n}} \eta_k$,

$$\eta_k = H R_{m_n}^{-1/2} (x_k - \mathbf{M} x_k), \quad \Lambda_{m_n} = \text{diag}(\lambda_i, i = 1, \dots, m_n),$$

H — матрицы собственных векторов матрицы R_{m_n} , $\Gamma_p = (I + \theta_n B_p B'_p)^{-1}$, b_p — вектор-строка матрицы B , функции $a_n(t)$ и $c_n(t)$ удовлетворяют неравенству при $0 < t < c < \infty$

$$\sup \{ |a_n(t)| + |c_n(t)| \} < \infty.$$

3. G_3 -оценка обратной ковариационной матрицы. Пусть x_1, x_2, \dots, x_n — наблюдения над m_n -мерным случайным вектором ξ с невырожденной ковариационной матрицей R . Так как

$$m_n^{-1} \text{Sp } R^{-1} = \lim_{t \rightarrow \infty} t m_n^{-1} \text{Sp } (I + tR)^{-1},$$

то, используя оценку G_2 , получаем, что в качестве G -оценки матрицы R^{-1} следует брать оценку $G_3 = \hat{R}^{-1} \left(1 - \frac{m_n}{n-1} \right)$, где \hat{R} — эмпирическая ковариационная матрица, $n > m_n$.

Используя доказательство центральной предельной теоремы для случайных детерминантов [38], легко доказать, что при выполнении условий этой теоремы элементы матрицы G_3 будут состоятельными оценками для соответствующих элементов матрицы R .

4. G_4 -оценки для следов степеней ковариационных матриц. Очевидно, что для $k=1, 2, \dots$

$$m_n^{-1} \text{Sp } R^k = \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\partial^k}{\partial t^k} m_n^{-1} \text{Sp } (I + tR)_{t=0}^{-1}.$$

Используя эту формулу и оценку G_2 , получаем, что $G_4^{(1)}$ -оценка величины $m_n^{-1} \text{Sp } R$ равна $m_n^{-1} \text{Sp } \hat{R}$. Для нахождения $G_4^{(2)}$ -оценки величины $m_n^{-1} \text{Sp } R^2$ нужны некоторые вычисления. Учитывая, что $\theta'(0) = 1$, $\theta''(0) = \frac{2}{m_n} \text{Sp } \hat{R} \frac{m_n}{n-1}$, получаем, что

$$G_4^{(2)} = m_n^{-1} \text{Sp } \hat{R}^2 - (m_n^{-1} \text{Sp } \hat{R})^2 \frac{m_n}{n-1}.$$

Аналогичные формулы можно найти для оценок $G_4^{(k)}$, $k=3, 4, \dots$

§ 22. Уравнение Дайсона

Большое число результатов, связанных с изучением случайных детерминантов, получено при решении некоторых математических моделей в физике твердого тела [58—60, 65, 69, 99]. В частности, Дайсоном рассматривалась следующая задача: пусть задана цепочка n упруго связанных частиц, массы которых m_1, m_2, \dots, m_n являются независимыми, одинаково распределенными случайными величинами. Продольные колебания такой цепочки с закрепленными концами описываются системой уравнений [87]

$$x_{k+1} - 2x_k + x_{k-1} = m_k \ddot{x}_k, \quad x_0 = x_{n+1} = 0,$$

в которой константа упругого взаимодействия соседних частиц равна 1, x_k — смещение частиц из положения равновесия.

Собственные частоты λ_{kn} , $k=1, \dots, n$, этой колебательной системы находятся из условия разрешимости следующей системы линейных уравнений

$$u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1} = -\lambda_{kn} m_k u_k, \quad u_0 = u_{n+1} = 0,$$

т. е. находятся как собственные числа матрицы Якоби

$$C_n = \left(-\frac{2\delta_{ij}}{m_i} + \frac{\delta_{i,j-1}}{\sqrt{m_i m_{i-1}}} + \frac{\delta_{i,j+1}}{\sqrt{m_i m_{i+1}}} \right).$$

Дайсон [87, 68] предложил изучать предельное поведение нормированных спектральных функций $\mu_n(x) = n^{-1} \sum_k F(x - \lambda_{kn})$, $F(x) = 1$ при $x > 0$, $F(x) = 0$ при $x \leq 0$, матрицы C_n с помощью так называемого «логарифмического преобразования»

$$\int_0^{\infty} \ln(z+x) d\mu_n(x) = n^{-1} \ln \det(Iz + C_n), \quad z = t + is.$$

Для случайных величин $n^{-1} \ln \det(Iz + C_n)$ можно легко доказать предельные теоремы типа закона больших чисел, а также найти предел их математических ожиданий, так как для детерминантов матриц Якоби справедливы хорошо известные рекуррентные соотношения.

Теорема Дайсона о предельном поведении величин $n^{-1} \ln \det(Iz + \Xi_n)$ обобщена в работе [32]: пусть случайные величины ξ_i , $i = 1, 2, \dots$, матриц $\Xi_n = ((2 + \xi_i) \delta_{ij} - \delta_{ij+1} - \delta_{ij-1})$ независимы, неотрицательны, одинаково распределены и для некоторого

$\delta > 0$ $M |\ln \xi_1|^{1+\delta} < \infty$. Тогда $p \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \ln \det \Xi_n = \int_1^{\infty} \ln x dF(x)$, где функция распределения $F(x)$ удовлетворяет интегральному уравнению Дайсона

$$F(x) = \iint_{2+y-z^{-1} < x, z > 1} dF(z) dP\{\xi_1 < y\}.$$

Используя это уравнение, можно найти по формуле обращения для «логарифмического преобразования» предельную спектральную функцию. Отметим, что в некоторых случаях можно обойтись без этого преобразования, используя осцилляционную теорему Штурма [32]. Для детерминантов несимметричных случайных матриц Якоби аналогичные уравнения получены в работе [46].

§ 23. Предельные теоремы для нормированных спектральных функций пучка самосопряженных случайных матриц

Пусть $A = (\xi_{ij})$, $B = (\eta_{ij})$ — самосопряженные случайные матрицы n -го порядка. Нормированной спектральной функцией пучка случайных матриц A и B называется выражение

$$\mu_n(x) = n^{-1} \sum_{k=1}^n F(x - \lambda_k),$$

где $F(x - \lambda_k) = 1$, если $\lambda_k < x$ и $F(x - \lambda_k) = 0$, если $\lambda_k \geq x$, λ_k — корни характеристического уравнения $\det(zA + B) = 0$. Предельные теоремы для спектральных функций $\mu_n(x)$ от некоторых случайных матриц A и B рассматривались в работах [101—103,

106—107]. В настоящем параграфе предложен новый метод доказательства предельных теорем для спектральных функций $\mu_n(x)$, основанный на использовании преобразований Стильбеса, методов регуляризации и аналитических продолжений преобразований Стильбеса, предельных теорем для случайных детерминантов, а также функциональных нелинейных уравнений для предельных преобразований Стильбеса. Получено утверждение, которое обобщает соответствующие результаты, полученные в работах [101—103, 106, 107].

Теорема 23.1. Пусть элементы случайных матриц

$$A = (\xi_{ij}^{(m)}), \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, p_m,$$

$$B = (\eta_{ij}^{(m)}), \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, q_m,$$

для каждого значения n независимы, заданы на одном вероятностном пространстве, $M\xi_{ij}^{(m)} = M\eta_{ij}^{(m)} = 0$, $D\xi_{ij}^{(m)} = D\eta_{ij}^{(m)} = 1$,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{p_m}{m} = c_1, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{q_m}{m} = c_2, \quad c_1 + c_2 > 1, \quad (23.1)$$

$\mu_m(x)$ — нормированные спектральные функции пучка случайных матриц AA' и BB' и выполняется условие Линдеберга: для любого $\tau > 0$

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} m^{-2} \sum_{i=1}^m \left\{ \sum_{j=1}^{p_m} M [\xi_{ij}^{(m)}]^2 \chi (|\xi_{ij}^{(m)}| m^{-1/2} > \tau) + \right. \\ \left. + \sum_{j=1}^{q_m} M [\eta_{ij}^{(m)}]^2 \chi (|\eta_{ij}^{(m)}| m^{-1/2} > \tau) \right\} = 0. \end{aligned} \quad (23.2)$$

Тогда с вероятностью 1

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mu_m(x) = \mu_1(x) + \mu_2(x), \quad \mu_1'(x) = \delta(x) (1 - c_2) \chi(c_2 < 1),$$

где

$$\mu_2'(x) = \begin{cases} [2\pi x (1+x)]^{-1} [4x(c_1 - 1 + c_2) - (x(1 - c_1) + c_2 - 1)^2]^{1/2}, & \gamma_1 \leq x \leq \gamma_2, \\ 0, & x \notin [\gamma_1, \gamma_2], \end{cases} \quad (23.3)$$

$$\gamma_{1,2} = [\sqrt{c_1 + c_2 - 1} \pm \sqrt{c_1 c_2}]^2 (c_1 - 1)^{-2}, \quad \text{при } c_1 \neq 1,$$

$$\mu_2'(x) = \begin{cases} [2\pi x (1+x)]^{-1} [4x c_2 - (c_2 - 1)^2]^{1/2}, & x \geq (4c_2)^{-1} (c_2 - 1)^2, \\ 0, & 0 < x < (4c_2)^{-1} (c_2 - 1)^2, \end{cases}$$

при $c_1 = 1$,

$$\mu_2'(x) = 0 \quad \text{при } c_1 = 0,$$

$\delta(x)$ — δ -функция.

Доказательство. Рассмотрим преобразование Стильеса

$$\int_0^{\infty} (t+x)^{-1} d\mu_m(x) = m^{-1} \text{Sp } m^{-1} A A' [A A' m^{-1} t + m^{-1} B B']^{-1}, \quad (23.4)$$

$$t > 0.$$

Очевидно, что для любого $\alpha > 0$

$$\begin{aligned} & |m^{-1} \text{Sp } m^{-1} A A' [m^{-1} A A' t + m^{-1} B B']^{-1} - \\ & - m^{-1} \text{Sp } m^{-1} A A' [m^{-1} A A' t + m^{-1} B B' + I \alpha]^{-1}| \leq \\ & \leq t^{-1} m^{-1} \text{Sp} (I \alpha + m^{-1} A A' t + m^{-1} B B')^{-1} \alpha. \end{aligned} \quad (23.5)$$

Нам понадобится следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 23.1. Если выполняются условия теоремы, то для любых $\alpha > 0$, $t > 0$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} m^{-1} \mathbf{M} \text{Sp} (I \alpha + m^{-1} A A' t + m^{-1} B B')^{-1} = a(t, \alpha), \quad (23.6)$$

где $a(t, \alpha)$ удовлетворяет уравнению

$$a(t, \alpha) = \left[\alpha + \frac{c_1 t}{1 + t a(t, \alpha)} + \frac{c_2}{1 + a(t, \alpha)} \right]^{-1}, \quad (23.7)$$

решение уравнения (23.7) существует и единственно в классе аналитических функций по переменной t , $t > 0$.

Доказательство. Введем обозначения $v_{ij} = \sqrt{t} \xi_{ij}^{(m)} m^{-1/2}$, $i=1, \dots, m$, $j=1, \dots, p_m$, $v_{ij} = \eta_{ij}^{(m)} m^{-1/2}$, $i=1, \dots, m$, $j = p_m + 1, \dots, p_m + q_m$, $C = (v_{ij})$, $i=1, \dots, m$, $j=1, \dots, p_m + q_m$. Используя формулу

$$\det T_n = \det T_{n-1} (a_{11} - (T_{n-1}^{-1} a_1, b_1)), \quad (23.8)$$

где $T_n = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ — невырожденные матрицы, $a_1 = (a_{12}, \dots, a_{1n})$, $b_1 = (a_{21}, \dots, a_{n1})$, имеем

$$\begin{aligned} m^{-1} \mathbf{M} \text{Sp} (I \alpha + C C')^{-1} &= m^{-1} \sum_{k=1}^m \mathbf{M} [\alpha + (d_k, d_k) - (C'_k R_k C_k d_k, d_k)]^{-1} = \\ &= m^{-1} \sum_{k=1}^m \mathbf{M} \left[\alpha + \sum_{l=1}^{p_m + q_m} \mathbf{M} v_{kl}^2 - \right. \\ & \left. - \sum_{l=1}^{q_m + q_m} v_{kl}^2 \left(\sum_{i,j=1}^m r_{ij}^k v_{il} v_{jl} \right) + e_k^{(m)} \right]^{-1}, \end{aligned} \quad (23.9)$$

где $d_k = (v_{k1}, \dots, v_{k(p_m + q_m)})$ — k -ая вектор-строка матрицы C , C_k — матрица, полученная из матрицы C вычеркиванием k -ой строки,

$$R_k = (I \alpha + C_k C'_k)^{-1} = (r_{ij}^k)_{i,j=1}^m,$$

$$e_k^{(m)} = \sum_{l=1}^{p_m + q_m} (v_{kl}^2 - \mathbf{M} v_{kl}^2) - (C'_k R_k C_k d_k, d_k) + \sum_{l=1}^{p_m + q_m} v_{kl}^2 \left(\sum_{i,j \neq k} r_{ij}^k v_{il} v_{jl} \right).$$

Далее доказательство леммы совпадает с доказательством теоремы 3.2.9. (см. [20, стр. 261]), за исключением некоторых тривиальных изменений. Так же как и при доказательстве формулы (3.2.53) [32, стр. 265], получаем

$$\begin{aligned} Mm^{-1} \text{Sp} (I\alpha + CC')^{-1} = m^{-1} \sum_{k=1}^m \left[\alpha + \sum_{l=1}^{p_m+q_m} Mv_{kl}^2 \left(1 + \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{i=1}^m Mr_{ii} Mv_{il}^2 \right)^{-1} \right]^{-1} + o(1), \end{aligned} \quad (23.10)$$

где r_{ii} — элементы матрицы $(I\alpha + CC')^{-1}$. Из формулы (23.10) получаем

$$\begin{aligned} a_m(t, \alpha) = m^{-1} \sum_{k=1}^m \left[\alpha + \sum_{l=1}^{p_m} \frac{t}{m} \left(1 + \frac{t}{m} \sum_{i=1}^m Mr_{ii} \right)^{-1} + \right. \\ \left. + m^{-1} \sum_{l=p_m+1}^{p_m+q_m} \left(1 + m^{-1} \sum_{i=1}^m Mr_{ii} \right)^{-1} \right]^{-1} + o(1), \end{aligned} \quad (23.11)$$

где $a_m(t, \alpha) = Mm^{-1} \text{Sp} (I\alpha + CC')^{-1}$. Из (23.11) имеем

$$a_m(t, \alpha) = [\alpha + c_1 t (1 + t a_m(t, \alpha))^{-1} + c_2 (1 + a_m(t, \alpha))^{-1}]^{-1}, \quad (23.12)$$

используя уравнение (23.11), легко установить, что существует предел $\lim_{m \rightarrow \infty} a_m(t, \alpha) = a(t, \alpha)$, и функция $a(t, \alpha)$ является единственным решением уравнения (23.7).

Лемма 23.2. При выполнении условий теоремы с вероятностью 1 при $\alpha > 0$, $t > 0$

$$\lim_{\alpha \downarrow 0} \lim_{m \rightarrow \infty} \alpha m^{-1} \text{Sp} (I\alpha + CC')^{-1} = 0, \quad (23.13)$$

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} m^{-1} \text{Sp} m^{-1} A A' (m^{-1} t A A' + m^{-1} B B' + I\alpha)^{-1} = \\ = \int_0^\alpha \frac{\partial}{\partial t} a(t, x) dx. \end{aligned} \quad (23.14)$$

Доказательство. Используя доказательство теоремы 3.1.8 [20, стр. 174] или теоремы 10.1.1. [32, стр. 253], а также лемму 1, получаем, что с вероятностью 1 для всех $\alpha > 0$, $t \geq 0$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} m^{-1} \text{Sp} (I\alpha + m^{-1} t A A' + m^{-1} B B')^{-1} = a(t, \alpha). \quad (23.15)$$

Из уравнения (23.7) находим, что функция $\alpha a(t, \alpha)$ является решением алгебраического уравнения 3-й степени:

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0, \quad (23.16)$$

где

$$a = t^{-1}(1+t)\alpha + c_1 + c_2 - 1, \quad b = \alpha^2 t^{-1} + (c_2 - 1)\alpha t^{-1} + c_1 \alpha - \alpha, \\ c = -\alpha^2 t^{-1}.$$

Переходя в уравнении (23.16) к пределу при $\alpha \downarrow 0$ и используя (23.15), получаем, что при условии $c_1 + c_2 > 1$, $t > 0$ $\lim_{\alpha \downarrow 0} \alpha a(t, \alpha) = 0$. Следовательно, справедливо (23.13). Очевидно, что

$$m^{-1} \text{Sp } m^{-1} A A' (m^{-1} t A A' + m^{-1} B B' + I \alpha)^{-1} = \\ = \frac{\partial}{\partial t} \ln \det \left[\frac{A A' t}{m} + \frac{B B'}{m} + I \alpha \right]. \quad (23.17)$$

Используя формулу (23.17) и доказательство теоремы 10.1.1. [32, стр. 253], получаем, что с вероятностью 1 для всех $\alpha > 0$, $t \geq 0$ при выполнении условий теоремы

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left\{ m^{-1} \text{Sp } \frac{A A'}{m} \left(\frac{A A' t + B B'}{m} + I \alpha \right)^{-1} - \right. \\ \left. - m^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{M} \ln \det \left[\frac{A A' t + B B'}{m} + I \alpha \right] \right\} = 0. \quad (23.18)$$

Используя лемму 23.1, получаем

$$\lim_{m \rightarrow \infty} m^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{M} \ln \det \left[\frac{A A' t + B B'}{m} + I \alpha \right] = \\ = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} m^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\beta}^{\alpha} \mathbf{M} \text{Sp} \left[I x + \frac{A A' t + B B'}{m} \right]^{-1} dx = \\ = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\beta}^{\alpha} a(t, x) dx. \quad (23.19)$$

Таким образом, справедливо (23.14). Лемма 2 доказана.

Используя лемму 2, из неравенства (23.5) и равенства (23.4) находим, что с вероятностью 1 так же как и при доказательстве теоремы 9.2.4. [32, стр. 228]

$$\lim_{\alpha \downarrow 0} \lim_{\beta \rightarrow \infty} \limsup_{m \rightarrow \infty} \left| \int_0^{\infty} (t+x)^{-1} d\mu_m(x) - \frac{\partial}{\partial t} \int_{\beta}^{\alpha} a(t, x) dx \right| = 0. \quad (23.20)$$

Лемма 3.

$$\lim_{\alpha \downarrow 0} \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\beta}^{\alpha} a(t, x) dx = - \frac{c_1 a(t, 0)}{1 + t a(t, 0)}, \quad (23.21)$$

где

$$a(t, 0) = 2 [t(c_1 - 1) + c_2 - 1 + ((t(c_1 - 1) + c_2 - 1)^2 + \\ + 4t(c_1 + c_2 - 1))^{1/2}]^{-1}.$$

Доказательство. В интеграле

$$f(\alpha, \beta) = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\beta}^{\alpha} a(t, x) dx$$

сделаем замену переменных

$$x = y^{-1} - c_1 t (1 + ty)^{-1} - c_2 (1 + y)^{-1}, \quad y > 0.$$

Тогда

$$\begin{aligned} f(\alpha, \beta) &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{a(t, \beta)}^{a(t, \alpha)} y \frac{d}{dy} [y^{-1} - c_1 t (1 + ty)^{-1} - c_2 (1 + y)^{-1}] dy = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} y \left[\frac{1}{y} - \frac{c_1 t}{1 + ty} - \frac{c_2}{1 + y} \right] \Big|_{a(t, \beta)}^{a(t, \alpha)} - \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{a(t, \beta)}^{a(t, \alpha)} \left[\frac{1}{y} - \frac{c_1 t}{1 + ty} - \frac{c_2}{1 + y} \right] dy. \end{aligned} \quad (23.22)$$

Учитывая, что

$$\alpha^{-1}(t, \alpha) - c_1 t (1 + t\alpha(t, \alpha))^{-1} - c_2 (1 + \alpha(t, \alpha))^{-1} = \alpha,$$

из (23.22) находим

$$f(\alpha, \beta) = c_1 t^{-1} \left[\frac{1}{1 + t\alpha(t, \alpha)} - \frac{1}{1 + t\alpha(t, \beta)} \right].$$

Переходя к пределу при $\alpha \rightarrow 0$, $\beta \rightarrow \infty$, получаем (23.21). Лемма 3 доказана. Так как функция $a(t, 0)$ является аналитической при $t > 0$ и из соотношения (23.20) следует, что функции $\mu_m(x)$ с вероятностью 1 сходятся к предельной неслучайной функции $\mu(x)$, то для функции $\mu(x)$, аналитически продолжая функцию $-c_1 a(t, 0) [1 + t a(t, 0)]^{-1}$ на всю комплексную плоскость, имеем

$$\int_0^{\infty} \frac{d\mu(x)}{x-z} = -\frac{c_1 a(-z, 0)}{1 - z a(-z, 0)}, \quad \text{Im } z \neq 0. \quad (23.23)$$

По формуле обращения для преобразования Стильтьеса из (23.23) находим, что

$$\mu(x_1) - \mu(x_2) = -\frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{x_2}^{x_1} \text{Im} \frac{c_1 a(-x - i\varepsilon, 0)}{1 - (x + i\varepsilon) a(-x - i\varepsilon, 0)} dx. \quad (23.24)$$

Обозначим $a(-z, 0) = \Phi(z)$. Тогда

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \left[-\frac{c_1 z}{1 - z\Phi(z)} + \frac{c_2}{1 + \Phi(z)} \right]^{-1}, \\ \Phi(z) &= 2[-z(c_1 - 1) + c_2 - 1 \pm \{[-z(c_1 - 1) + c_2 - 1]^2 - \\ &\quad - 4z[c_1 + c_2 - 1]\}^{1/2}]^{-1}. \end{aligned}$$

Итак,

$$\int_0^{\infty} (x-z)^{-1} d\mu(x) = -2c_1[-z(c_1+1) + c_2 - 1] \pm \{[-z(c_1-1) + c_2 - 1]^2 - 4z[c_1 - 1 + c_2]\}^{1/2} - 1.$$

Используя формулу (23.24), получаем (23.3). Теорема 23.1 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Абрамов А. А.*, Об ошибке округлений при решении систем линейных уравнений. Докл. АН СССР, 1954, 97, № 2, 189—191 (РЖМат, 1955, 6107)
2. *Айвазян С. А., Енюков И. С., Мешалкин Л. Д.*, Прикладная статистика. Исследование зависимостей. Справ. изд. М.: Финансы и стат., 1985, 487 с. (РЖМат, 1985, 6В438К)
3. *Андерсон Т.*, Введение в многомерный статистический анализ. М., Физматгиз, 1963, 500 с. (РЖМат, 1964, 1В109К)
4. *Березин Ф. А.*, Несколько замечаний о распределении Вигнера. Теор. и мат. физ., 1973, 17, № 3, 305—318 (РЖМат, 1974, 4Б890)
5. *Вейль А.*, Интегрирование в топологических группах и его применения. М., Изд-во ин. лит., 1950, 223 с.
6. *Виноградская А. В., Гирко В. Л.*, Управление спектром в системах, описываемых линейными уравнениями в гильбертовых пространствах. Автомат. и телемех., 1983, № 5, 46—54 (РЖМат, 1983, 9Б679)
7. *Владимиров В. С., Волович И. В.*, Суперанализ. II. Интегральное исчисление. Теор. и мат. физ., 1984, 60, № 2, 169—198 (РЖМат, 1985, 2В1060)
8. *Воеводин В. В.*, Об асимптотическом распределении ошибок округления при разложении матрицы на множители и решении систем уравнений. Ж. вычисл. мат. и мат. физ., 1969, 9, № 4, 932—934 (РЖМат, 1969, 12Б785)
9. —, Об асимптотическом распределении ошибок округления при линейных преобразованиях. Ж. вычисл. мат. и мат. физ., 1967, 7, № 5, 965—976 (РЖМат, 1968, 3Б723)
10. *Генденштейн Л. Э., Кризе И. В.*, Суперсимметрия в квантовой механике. Успехи физ. наук, 1985, 146, № 4, 553—590
11. *Гирко В. Л.*, О распределении решений систем линейных уравнений случайными коэффициентами. Теория вероятностей и мат. стат. Межвед. науч. сб., 1970, № 2, 41—44 (РЖМат, 1971, 3В13)
12. —, Предельные теоремы для случайного детерминанта. I. Теория вероятностей и мат. стат. Межвед. науч. сб., 1971, № 5, 27—33 (РЖМат, 1971, 11В61)
13. —, О неравенствах для случайных детерминанта и перманента. Теория вероятностей и мат. стат. Межвед. науч. сб., 1971, № 4, 48—57 (РЖМат, 1971, 12В40)
14. —, Предельные теоремы для случайного детерминанта. II. Теория вероятностей и мат. стат. Межвед. науч. сб., 1972, № 6, 41—48 (РЖМат, 1972, 8В30)
15. —, Уточнение некоторых теорем для случайных детерминанта и перманента. Теория вероятностей и мат. стат. Межвед. науч. сб., 1972, № 7, 28—32 (РЖМат, 1973, 1В42)
16. —, Предельные теоремы для решений систем линейных случайных уравнений, собственных чисел и детерминантов случайных матриц. Докл. АН СССР, 1973, 212, № 5, 1039—1042 (РЖМат, 1974, 2В33)

17. —, Предельные теоремы для случайного детерминанта. III. Теория вероятностей и мат. стат. Межвед. науч. сб., 1973, № 8, 28—34 (РЖМат, 1973, 12В44)
18. —, Предельные теоремы для детерминантов доминантных случайных матриц. Вычисл. и прикл. мат. Межвед. науч. сб., 1973, № 19, 130—136 (РЖМат, 1973, 9В15)
19. —, Случайные матрицы Якоби. I. Теория вероятностей и мат. стат. Межвед. науч. сб., 1975, № 12, 25—35 (РЖМат, 1975, 9В28)
20. —, Случайные матрицы. Киев, Вища школа, 1975. 448 с. (РЖМат, 1975, 9В25К)
21. —, Предельные теоремы общего вида для спектральных функций случайных матриц. Теория вероятностей и ее применения, 1977, 22, № 1, 160—164 (РЖМат, 1977, 8В38)
22. —, Закон арктангенса. Тезисы Международной конференции по теории вероятностей и математической статистике. Вильнюс, 1977, 96—97
23. —, Предельные теоремы общего вида для нормированных спектральных функций симметричных случайных матриц. Предельн. теоремы для случайн. процессов, Киев, 1977, 50—70 (РЖМат, 1978, 10В30)
24. —, Стохастическая проблема Ляпунова. Теория вероятностей и мат. стат. (Киев), 1979, № 20, 42—44 (РЖМат, 1979, 6В339)
25. —, Логарифмический закон. Докл. АН УССР, 1979, А, № 4, 243—244 (РЖМат, 1979, 9В16)
26. —, Полуциркуловой закон Вигнера. Теория вероятностей и мат. стат. (Киев), 1979, № 20, 39—42 (РЖМат, 1979, 6В341)
27. —, Моменты обратных случайных матриц. Исслед. операций и АСУ, (Киев), 1979, № 14, 127—130 (РЖМат, 1980, 1В519)
28. —, Распределение собственных чисел и собственных векторов эрмитовых случайных матриц. Укр. мат. ж., 1979, 31, № 5, 533—537 (РЖМат, 1980, 2В460)
29. —, О центральной предельной теореме для случайных детерминантов. Теория вероятностей и мат. стат. (Киев), 1979, № 21, 35—39 (РЖМат, 1980, 2В30)
30. —, О единственности решения канонического спектрального уравнения. Укр. мат. ж., 1980, 32, № 6, 802—804 (РЖМат, 1981, 6В17)
31. —, Полярное разложение случайных матриц. Теория вероятностей и мат. стат. (Киев), 1980, № 23, 20—30 (РЖМат, 1981, 3В16)
32. —, Теория случайных детерминантов. Киев, Вища школа, 1980. 368 с. (РЖМат, 1980, 7В264К)
33. —, Собственные числа случайных матриц. I. Теория вероятностей и мат. стат. Межвед. науч. сб., 1974, № 11, 10—16 (РЖМат, 1974, 11В39)
34. —, Системы линейных случайных алгебраических уравнений. В сб. «Моделир. и оптимиз. систем упр.» Киев, Вища школа, 1974, 70—77 (РЖМат, 1975, 9В27)
35. —, О нормированных спектральных функциях случайных матриц. Теория вероятностей и мат. стат. (Киев), 1980, № 22, 29—33 (РЖМат, 1980, 7В20)
36. —, Гипотеза Е. Вигнера. Вычисл. и прикл. мат. (Киев), 1980, № 41, 71—79 (РЖМат, 1980, 12В1060)
37. —, Распределение собственных чисел и векторов унитарных случайных матриц. Теория вероятностей и мат. стат. (Киев), 1981, № 25, 14—17 (РЖМат, 1981, 11В17)
38. —, Центральная предельная теорема для случайных детерминантов. Теория вероятностей и ее применения, 1981, 26, № 3, 532—542 (РЖМат, 1982, 1В30)
39. —, Собственные числа случайных матриц. II. Теория вероятностей и мат. стат. (Киев), 1982, № 27, 27—28 (РЖМат, 1982, 7В23)
40. —, V-преобразование. Докл. АН УССР, 1982, А, № 3, 5—6 (РЖМат, 1982, 8В17)
41. —, О круговом законе. Теория вероятностей и мат. стат. (Киев), 1983, № 28, 15—21 (РЖМат, 1983, 7В27)

42. —, *Предельные теоремы для функций случайных величин*. Киев, Вища школа, 1983, 207 с. (РЖМат, 1984, 1В1К)
43. —, *Круговой закон. Теория вероятностей и ее применения*, 1984, 29, № 4, 669—679 (РЖМат, 1985, 7В40)
44. —, «Борьба с размерностью» в многомерном статистическом анализе. Тезисы третьей Всесоюзной научно-технической конференции «Применение многомерного статистического анализа в экономике и оценки качества продукции». Тарту, 1985, 43—52
45. —, *Эллиптический закон*. Докл. АН УССР, 1985, А, № 1, 56—59 (РЖМат, 1985, 8В28)
46. —, *Васильев В. В.*, *Предельные теоремы для нормированных спектральных функций несамосопряженных случайных матриц Якоби*. Теория вероятностей и ее применения, 1985, 30, № 1, 3—9 (РЖМат, 1985, 8В27)
47. —, *Кокобинадзе Т. С., Чайка О. Г.*, *Распределение собственных чисел гауссовских случайных матриц*. Укр. мат. ж., 1984, 36, № 1, 12—16 (РЖМат, 1984, 8В8)
48. —, *Литвин И. Н.*, *Стохастическое условие Калмана*. Вычисл. и прикл. мат. (Киев), 1983, № 49, 135—138 (РЖМат, 1983, 10В14)
49. —, —, *Интегральное представление гиперопределителей и его применение к исследованию устойчивости стохастических систем*. Управляемые динамические системы с непрерывно-дискретными параметрами. Киев, Наукова Думка, 1984, 97—102
50. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.*, *Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве*. М.: Наука, 1965, 448 с. (РЖМат, 1966, 8Б459К)
51. *Гренандер У.*, *Вероятности на алгебраических структурах*. М.: Мир, 1965, 275 с. (РЖМат, 1966, 3В2К)
52. *Дайсон Ф.*, *Статистическая теория энергетических уровней сложных систем*. М., Изд-во ин. лит., 1963, 123 с.
53. *Деев А. Д.*, *Представление статистик дискриминантного анализа и асимптотические разложения при размерностях пространства, сравнимых с объемом выборки*. Докл. АН СССР, 1970, 195, № 4, 759—762 (РЖМат, 1971, 4В165)
54. *Журбенко И. Г.*, *Некоторые моменты случайных определителей*. Теория вероятностей и ее применения, 1968, 13, № 4, 720—725 (РЖМат, 1969, 8В10)
55. *Заруцкий В. И.*, *Классификация нормальных векторов простой структуры в пространстве большой размерности*. Прикл. многомерн. стат. анализ. М., 1978, 37—51 (РЖМат, 1979, 7В213)
56. *Калман Р. Е.*, *Об общей теории систем управления*. Труды I конгресса ИФАК, Т. 2. М., АН СССР, 1961, 521—547 (РЖМат, 1961, 6Б294К)
57. *Кац М.*, *Вероятность и смежные вопросы в физике*. М.: Мир, 1965, 407 с.
58. *Лифшиц И. М.*, *О структуре энергетического спектра и квантовых состояниях неупорядоченных конденсированных систем*. Успехи физ. наук, 1963, 83, 617—655
59. *Марадудин А.*, *Дефекты и колебательный спектр кристаллов*. М.: Мир, 1968, 432 с.
60. —, *Монтролл Э., Вейс Д.*, *Динамическая теория кристаллической решетки в гармоническом приближении*. М.: Мир, 1965, 383 с.
61. *Марченко В. А., Пастур Л. А.*, *Распределение собственных значений в некоторых ансамблях случайных матриц*. Мат. сб., 1967, 72, № 4, 507—536 (РЖМат, 1969, 3Б491)
62. *Мешалкин Л. Д., Сердобольский В. И.*, *Ошибки при классификации многомерных наблюдений*. Теория вероятностей и ее применения, 1978, 23, № 4, 772—781 (РЖМат, 1979, 4В159)
63. *Молчанов С. А.*, *Строение собственных функций одномерных неупорядоченных структур*. Изв. АН СССР, Сер. мат., 1978, 42, № 1, 70—103 (РЖМат, 1978, 6В239)

64. Мотт Н., Электроны в неупорядоченных структурах. М.: Мир, 1969, 172 с.
65. —, Дэвис Э., Электронные процессы в некристаллических веществах. М.: Мир, 1974, 472 с.
66. Мурнаган Ф., Теория представлений групп. М., Изд-во ин. лит., 1950, 485 с.
67. Пастур Л. А., Спектры случайных самосопряженных операторов. Успехи мат. наук, 1973, 28, № 1, 3—64 (РЖМат, 1973, 5В46)
68. —, О спектре случайных матриц. Теор. и мат. физ., 1972, 10, № 1, 102—112 (РЖМат, 1972, 7В192)
69. Рофе-Бекетов Ф. С., О предельном распределении собственных частот неупорядоченной цепочки. Зап. мат. отд. физ.-мат. фак. Харьковск. ун-та и Харьковск. о-ва, 1960, 26, сер. 4, 143—153 (РМат, 1963, 12В249)
70. Слостников А. Д., О распределении некоторых случайных определителей. Теория вероятностей и ее применения, 1977, 22, № 4, 888—896 (РЖМат, 1978, 5В131)
71. Уилкс С., Математическая статистика. М.: Наука, 1967, 632 с. (РЖМат, 1968, 5В111К)
72. Хახубия Ц. Г., Одна лемма о случайных определителях и ее применение к характеристике многомерных распределений. Теория вероятностей и ее применения, 1965, 10, № 4, 755—758 (РЖМат, 1966, 3В87)
73. Хеннан Э., Представления групп и прикладная теория вероятностей. М.: Мир, 1970, 118 с. (РЖМат, 1970, 12В112К)
74. Хуа Ло-ген, Гармонический анализ функций многих комплексных переменных в классических областях. М., Изд-во ин. лит., 1959, 163 с. (РЖМат, 1962, 6В166К)
75. Шубин Н. Ю., Статистические методы в теории ядра. Физика элементарных частиц и атомного ядра, 1974, 5, вып. 4, 1023—1074
76. Эрдеи П., Некоторые нерешенные проблемы. Математика. Период. сб. перев. ин. статей, 1963, 7, № 4, 109—143 (РЖМат, 1964, 1А16)
77. Юдицкий М. И., О свойствах оценки наименьших квадратов для одного класса моделей регрессии. Теория вероятностей и мат. стат. Межвед. науч. сб., 1977, № 17, 153—162 (РЖМат, 1977, 9В214)
78. Anderson G. A., An asymptotic expansion for the noncentral Wishart distribution. Ann. Math. Statist., 1970, 41, № 5, 1700—1707 (РЖМат, 1971, 12В244)
79. Arnold L., On Wigner's semicircle law for the eigenvalues of random matrices. Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb., 1971, 19, № 3, 191—198 (РЖМат, 1972, 1В37)
80. —, On the asymptotic distribution of the eigenvalues of random matrices. J. Math. Anal. and Appl., 1960, 20, 262—268
81. Bagai O. P., The distribution of the generalized variance. Ann. Math. Statist., 1965, 36, № 1, 120—130 (РЖМат, 1965, 10В53)
82. Bellman R. E., A note on the mean value of random determinants. Quart. Appl. Math., 1955, 13, № 3, 322—324 (РЖМат, 1958, 4495)
83. Bennett B. M., On the cumulants of the logarithmic generalized variance and variance ratio. Skand. Aktuarietidskr., 1955, 38, № 1—2, 17—21 (РЖМат, 1956, 8981)
84. Bharucha-Reid A. T., Probabilistic methods in applied mathematics. V. 2. New York—London, Acad. Press, 1970
85. —, On the theory of random equations. Stochastic Processes Math. Phys. and Engng. Providence, R. I., Amer. Math. Soc., 1964, 40—69 (РЖМат, 1973, 8В279)
86. Chandra P. C., Distribution of the determinant of the sum of products matrix in the non-central linear case. Math. Nachr., 1965, 28, № 3—4, 169—179
87. Dyson F. J., The dynamics of a disordered linear chain. Phys. Rev., 1953, 92, № 6, 1331—1338 (РЖМат, 1955, 331)
88. Fabian V., Zufälliges Abrunden und die Konvergenz des linearen (Seidel-schen) Iterationsverfahrens. Math. Nachr., 1957, 16, № 5—6, 265—270 (РЖМат, 1958, 7203)

89. *Fortet R.*, Random determinants. *J. Res. Nat. Bur. Stand.*, 1951, 47, 465—470
90. *Goodman N. R.*, The distribution of the determinant of a complex Wishart distributed matrix. *Ann. Math. Statist.*, 1963, 34, № 1, 178—180 (PЖMar, 1964, 6B124)
91. *James A. T.*, The non-central Wishart distribution. *Proc. Roy. Soc.*, 1955, A229, № 1178, 364—366 (PЖMar, 1956, 8203)
92. *Komlós J.*, On the determinant of random matrices. *Stud. sci. math. hung.*, 1968, 3, № 4, 387—399 (PЖMar, 1969, 11B31)
93. —, On the determinant of $(0, 1)$ matrices. *Stud. sci. math. hung.*, 1967, 2, № 1—2, 7—21 (PЖMar, 1967, 11A277)
94. *Mehta M. L.*, Random matrices and the statistical theory of energy levels. New York—London, Acad. Press, 1967, 260 p.
95. *Nicholson W. L.*, On the distribution of 2×2 random normal determinants. *Ann. Math. Statist.*, 1958, 29, № 2, 575—580 (PЖMar, 1959, 9309)
96. *Nyquist H., Rice S. O., Riordan J.*, The distribution of random determinants. *Quart. Appl. Math.*, 1954, 12, № 2, 97—104 (PЖMar, 1955, 3859)
97. *Porter C. E.*, Statistical theories of spectra. *Fluctuations*. New York—London, Acad. Press, 1965, 578 p.
98. *Prékopa A.*, On random determinants. *I. Stud. sci. math. hung.*, 1967, 2, № 1—2, 125—132 (PЖMar, 1967, 10B4)
99. *Schmidt H.*, Disordered one-dimensional crystals. *Phys. Rev.*, 1957, 105, № 2, 425—441
100. *Selberg A. A.*, Bemerkninger om et multiplet integral. *Norsk mat. tidsskr.*, 1944, 26, 71—78
101. *Silverstein J. W.*, Comments on a result of Yin, Bai, and Krishnaiah for large dimensional multivariate F matrices. *J. Multivar. Anal.*, 1984, 15, № 3, 408—409 (PЖMar, 1985, 7B42)
102. *Wachter K. W.*, The strong limits of random matrix spectra for sample matrices of independent elements. *Ann. Probab.*, 1978, 6, № 1, 1—18 (PЖMar, 1978, 10B29)
103. —, The limiting empirical measure of multiple discriminant ratios. *Ann. Statist.*, 1980, 8, № 5, 937—957 (PЖMar, 1981, 5B197)
104. *Wigner E. P.*, On the distribution of the roots of certain symmetric matrices. *Ann. Math.*, 1968, 67, № 2, 325—327
105. —, Random matrices in physics. *SIAM Rev.*, 1967, 9, № 1, 1—23 (PЖMar, 1968, 7B149)
106. *Yin Y. Q., Bai Z. D., Krishnaiah P. R.*, Limiting behavior of the eigenvalues of a multivariate F matrix. *J. Multivar. Anal.*, 1983, 13, № 4, 508—516 (PЖMar, 1984, 6B30)
107. —, *Krishnaiah P. R.*, A limit theorem for the eigenvalues of product of two random matrices. *J. Multivar. Anal.*, 1983, 13, № 4, 489—507 (PЖMar, 1984, 6B29)

ТЕОРИЯ ПЕРКОЛЯЦИИ И НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

М. В. Меньшиков, С. А. Молчанов, А. Ф. Сидоренко

ВВЕДЕНИЕ

Физические предпосылки. Теория перколяции (протекания) возникла первоначально в физике твердого тела, но в последние годы находит все более широкие применения в самых различных естественных науках (физика, механика, геофизика, астрофизика, химия полимеров, коллоидная химия и т. п.). Основной объект этой теории — случайные однородные множества на графах, решетках, группах, евклидовых пространствах. При этом, в отличие от локальной теории (см., скажем, книгу Матерона [12]), перколяция изучает глобальные свойства таких множеств (проблема связности, статистика ограниченных компонент и т. п.). Именно такой подход позволяет рассмотреть широкий класс своеобразных (геометрических) фазовых переходов.

Не ставя своей целью обзор весьма значительной прикладной литературы по перколяции, опишем, тем не менее, некоторые наиболее принципиальные физические модели, приводящие к перколяционным задачам.

1°. **Фазовый переход Мотта в легированных полупроводниках.** Хорошо известный экспериментальный факт состоит в том, что при легировании полупроводникового кристалла (скажем, кремния или германия), атомы которого имеют валентность 4, пятивалентными атомами (скажем, мышьяка), при достаточно высокой концентрации $\lambda > \lambda_{\text{сг}}$ последних, возникает металлическая проводимость. Качественная модель этого явления (см. [28, 52]) состоит в следующем. Основное состояние каждого примесного электрона в кристалле изображается некоторой поверхностью (поверхность Ферми). Эти поверхности S_i одинаковы, одинаково ориентированы и жестко связаны со случайно расположенными примесными атомами, локализованными в точках x_i . Их множество $\cup S_i$ естественно распадается на связанные компоненты K_j . Металлизация кристалла при легировании примесью отождествляется с появлением (с вероятностью 1) бесконечного связанного кластера, т. е. перколяцией (протеканием) $\cup S_n = S_0$.

В итоге, мы приходим к следующей математической задаче. В пространстве R^v , $v \geq 2$, имеется пуассоновский ансамбль точек $\{x_i\}$ с интенсивностью λ (имеющей смысл концентрации) и фиксированное множество S_0 , содержащее начало координат $x_0=0$. Пусть $S_i = S_0 - x_i$ и $S = \bigcup_i S_i$. Требуется описать топологическую структуру множества S , в частности, выяснить, при каких λ имеется бесконечная связная компонента в S . Из соображений размерности ясно, что ответ на этот вопрос зависит от величины безразмерной константы $\beta = \lambda \text{Vol}(S_0)$, именно при фиксированном S и малых $\lambda < \lambda_0(S)$ перколяция отсутствует, а при $\lambda > \lambda_0(S)$ она имеет место. Последнее утверждение является строгим математическим фактом и (по модулю того, что модель сильно упрощена) оно может служить объяснением фазового перехода диэлектрик—металл.

2°. Концентрационная модель разрушения Журкова. Современная концепция разрушения однородных материалов [22, 5, 6] основана на следующих представлениях. При действии на образец одноосной нагрузки в его толще возникают микротрещины (микросколы), которые можно представить в виде плоских дисков. «Близко расположенные» трещины объединяются, происходит их укрупнение. Простейший критерий укрупнения (не учитывающий взаимную ориентацию микротрещин) состоит в следующем. Окружим каждую трещину сферой S_i , диаметр которой в 3 раза превосходит диаметр соответствующего диска и имеющей тот же самый центр x_i . Если сферы, связанные с двумя микротрещинами, пересекаются, то последние сливаются. Образование магистральной трещины (т. е. разрушение образца) эквивалентно тем самым появлению связного (практически бесконечного) кластера сфер, т. е. перколяции «дефектного» множества $\bigcup S_i$. Не удивительно, что критерий разрушения, как и в задачах п. 1°, формулируется в терминах безразмерной величины $\beta = \lambda \langle \text{Vol } S_i \rangle$, имеющей смысл среднего числа сфер, пересекающихся с данной сферой — так называемого координационного числа. По данным численного моделирования и прямым наблюдениям за разрушением блоков бетона, стекла и т. п. установлено, что $\beta_{cr} \approx 3 \div 3,5$.

Отметим, что, в отличие от моделей физики полупроводников, сферы S_i имеют случайные размеры, даже для самых однородных материалов, хотя, по-видимому, в этом случае разброс размеров микротрещин не слишком велик. Попытки применить концентрационную идеологию разрушения к геофизической среде, характеризующейся ярко выраженной многомасштабностью [24], показали, что здесь требуются серьезные коррективы и критерий, выраженный в терминах координационного числа β_{cr} , уже не годится.

Многомасштабным схемам перколяции и разрушения посвящены работы [27, 32, 37]. Другие геофизические приложения перколяции см. в [2, 17].

3°. **Старение полимерных покрытий.** В процессе эксплуатации изоляционных полимерных покрытий (кабели, провода и т. п.) в них развивается сеть микродефектов или пор, появление которых может быть связано либо со структурными перестройками полимера, либо, что бывает чаще, с термодиффузией низкомолекулярной компоненты (наполнителя полимерной матрицы). Для многих типов полимеров (ПВХ, эмали и т. п.) элементарные микропоры, подобно дыркам в сыре, имеют сферическую форму S_i . Подобно 1°, 2°, в этом случае дефектное множество описывается пуассоновской моделью сфер случайного радиуса. Важная особенность задач п. 3° состоит в том, что здесь нас интересует не только вопрос о возникновении перколяции дефектного множества $S = \cup S_i$ в бесконечном пространстве, но и проблема больших уклонений, которые обуславливают протекание через конечный слой вещества еще до достижения перколяционного порога (по концентрации S). По поводу этих моделей см. [1, 15, 25].

4°. **Линии уровня случайных полей.** Одна из центральных проблем гидродинамики и магнитогидродинамики — описание топологии линии тока и магнитных силовых линий в различных, в частности, рандомизированных моделях. В качестве примера рассмотрим двумерную модель магнитного случайного и однородного поля [7]. Такое поле $H(x)$, $x \in \mathbb{R}^2$, определяется как ротор скалярного однородного потенциала

$$\vec{H}(x) = \text{rot } \Phi(x) = \left(-\frac{\partial}{\partial x_2} \Phi(x), \frac{\partial}{\partial x_1} \Phi(x) \right), \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Очевидно, магнитные силовые линии совпадают с линиями уровня поля Φ . Поэтому физически важный вопрос о существовании уходящих на бесконечность силовых линий сводится к аналогичной проблеме для линий уровня Φ . Предполагается, что скалярное однородное в \mathbb{R}^2 поле с быстроубывающими корреляциями и гладкими реализациями имеет лишь замкнутые линии уровня, но соответствующая математическая теорема доказана лишь для достаточно высоких (низких) линий уровня (подробнее см. ниже).

Общий вопрос о глобальном строении множеств уровня скалярных однородных полей $A_h^+ = \{x \in \mathbb{R}^n : \Phi(x) > h\}$ важен для многих приложений и может рассматриваться как один из центральных в теории перколяции.

5°. **Теория осреднения и перколяция.** Во многих задачах теории осреднения случайных сред также возникают перколяционные мотивы. Приведем два примера:

а) Распространение волн в случайных средах. Пусть $n(x)$ — коэффициент преломления света в точке x , тогда в надлежащей системе единиц

$$t_{x,y} = \inf_{\gamma: x \rightarrow y} \int \gamma_s ds, \quad x, y \in \mathbb{R}^3, \quad (1)$$

представляет время, за которое световой фронт, исходящий из x , достигнет точки y . Очевидно, $t_{x,y}$ — метрика в R^3 . Пусть $x = (0, 0, a)$, $y = (0, 0, b)$, тогда $f_{a,b} = t_{x,y}$ — субаддитивный процесс, $f_{a,b} \leq f_{a,c} + f_{c,b}$. Если поле однородно, то он, очевидно, и стационарен. По эргодической теореме Кингмана [51] существует п. н. (возможно, бесконечный)

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{f_{0,a}}{a} = \mu. \quad (3)$$

Задача о выяснении условий конечности μ или о предельном поведении волнового фронта, т. е. функции $t_{0,x}$, $|x| \rightarrow \infty$, называется проблемой перколяции до первого достижения (first passage percolation). Подробнее см. [46, 53].

б) Близкие проблемы возникают при изучении случайных сетей сопротивлений. Представим, например, квадратную сетку $N \times N$, состоящую из N^2 случайных сопротивлений ξ_i (для простоты одинаково распределенных и независимых). Если верхний и нижний ряды шунтированы, то при прохождении тока между шунтами сетка будет иметь некоторое случайное сопротивление ρ_N . Нетрудно показать, что $\rho_N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \rho_{\text{эфф}}$ (п. н.). Предельную

величину $\rho_{\text{эфф}}$ можно рассматривать как эффективное среднее сопротивление одного звена сетки. Определение $\rho_{\text{эфф}}$ можно рассматривать как задачу осреднения некоторой системы разностных уравнений со случайными коэффициентами (представляющей попросту запись законов Кирхгофа для узлов и элементарных ячеек сетки). Перколяционная природа проблемы станет ясной, если мы рассмотрим тот крайний случай, когда

$$\xi_i = \begin{cases} 0 & \text{с вероятностью } p; \\ +\infty & \text{с вероятностью } 1-p. \end{cases}$$

Тогда, как нетрудно понять, $\rho = 0$ или $+\infty$, в зависимости от того, существует или не существует бесконечный связный кластер хорошо проводящих сопротивлений. Точнее говоря, это верно по модулю теоремы о совпадении различных определений перколяционного порога для задачи связей на решетке (подробнее см. ниже). Детальный анализ задач о случайных сетях сопротивлений см. в [45].

Среди других важных приложений теории перколяции отметим, не вдаваясь в подробности, коллоидную химию (образование гелей и т. п.) и физику полимеров. См. по этому поводу монографию [4].

Базовые модели перколяции, контурный метод. Простейшими, и в то же самое время наиболее важными, являются введенные Хаммерсли модели узлов и связей на целочисленной решетке Z^v , $v \geq 2$ (случай $v=1$ не интересен, так как при этом в моделях перколяция невозможна). Эти модели описаны во мно-

гих статьях и книгах, включая популярные [29], наиболее подробное изложение см. [45].

Напомним, что в задаче узлов на решетке Z^v определена случайная бернуллиевская функция $\xi(x)$, принимающая в каждой точке значения $+1$ или -1 с вероятностями p и $q=1-p$, соответственно. Множества $D^+ = \{x: \xi(x) = +1\}$, $D^- = \{x: \xi(x) = -1\}$ образуют разбиение Z^v . Они распадаются на связанные компоненты $D_i^+ : D^+ = \cup D_i^+$; $D_j^- : D^- = \cup D_j^-$ по отношению к стандартной связности (соседство по ребрам). Говорят, что « $+1$ » протекают на бесконечность (перколируют), если среди компонент D_i^+ есть бесконечные. Аналогичное определение относится к « -1 ». По закону $0-1$ Колмогорова, последние события имеют вероятность 0 или 1 . Поскольку два поля ξ , отвечающие различным значениям параметра p ($p', p'' : p' > p''$), можно реализовать на одном вероятностном пространстве так, что $D^{+'} \supset D^{+''}$ (обозначения очевидны) и при замене $+1$ на -1 и p на q картина статистически воспроизводится, то на отрезке $[0, 1]$ можно указать две точки $0 \leq p_{cr} \leq 1$, $q_{cr} = 1 - p_{cr}$ такие, что при $p > p_{cr}$ протекание « $+1$ » имеется п. н., при $p < p_{cr}$ его п. н. нет; при $q < q_{cr}$ п. н. перколируют « -1 », а при $q > q_{cr}$ протекания « -1 » нет п. н.

Эти рассуждения применимы к любому бесконечному счетному графу, без всяких предположений однородности. Априори возможны случаи $p_{cr} = 1$, $p_{cr} = 0$. (Например, на решетке Z^1 , очевидно, $p_{cr} = 1$, а на полном бесконечном неориентированном графе $p_{cr} = 0$.)

В задаче связей бинарное бернуллиевское поле $\xi(x)$ определено на ребрах решетки Z^v . Все определения и простейшие замечания, относившиеся выше к задаче узлов, очевидным образом применимы и к задаче связей. Конечно, вообще говоря, $p_{cr}^{(cb)} \neq p_{cr}^{(y3)}$, однако $p_{cr}^{(y3)} \geq p_{cr}^{(cb)}$. Мы не будем, как правило, усложнять обозначения указаниями на тип перколяционной проблемы (узлы или связи). Ниже, главным образом, будет анализироваться задача узлов.

Основное достижение первого этапа развития теории перколяции (Хаммерсли [41]) состояло в установлении того факта, что при $v \geq 2$ на решетках Z^v и в задаче связей и в задаче узлов

$$0 < p_{cr} < 1; \quad 0 < q_{cr} < 1.$$

Тем самым, при изменении параметра p в системе происходит, по крайней мере, одна (если $p_{cr} = q_{cr} = 1/2$), а при $p_{cr} \neq q_{cr}$ даже две качественные перестройки множеств уровня поля $\xi(x)$. Эти перестройки в физических приложениях интерпретируются как фазовые переходы. Отметим, что эти переходы не термодинамические и связаны с параметрами типа концентрации.

Хаммерсли применил к перколяционным задачам на Z^v контурный метод, который хорошо известен в статистической физике спиновых систем (модель Изинга и пр.). Воспроизведем соответствующие классические рассуждения (для задачи узлов на Z^v , $v \geq 2$).

Покажем, что $p_{cr} > 0$. Допустим, что множество «+1» перколюрует на ∞ . Из однородности модели и счетности Z^v следует, что тогда

$$P(B) = P\{\exists \text{ бесконечному кластеру «+1»}\} > 0.$$

На множестве $\omega \in B$ существует бесконечный связный путь γ из «+1», уходящий из точки $x_0 = 0$ на бесконечность. Можно считать, что γ самонепересекается. Тем более, для любого n происходит событие $B_n = \{\text{существует путь длины } n \text{ без самопересечений, составленный из «+1» и выходящий из } x_0 = 0\}$. Но

$$\begin{aligned} P\{B_n\} &\leq \sum_{\gamma: x_0 \rightarrow |\gamma|=n} P\{\gamma \text{ покрыт «+»}\} < \\ &\leq p^n |\{\gamma: |\gamma|=n, \gamma: x_0 \rightarrow\}| \leq p^n \cdot 2v(2v-1)^n. \end{aligned}$$

Здесь γ — пути без самопересечений, выходящие из $x_0 = 0$, $|\gamma|$ — длина пути. Из леммы Бореля—Кантелли следует, что при $p < 1/(2v-1)$ происходит п. н. лишь конечное число событий B_n , т. е. $P(B) = 0$. Итак, $p_{cr} \geq 1/(2v-1)$.

Покажем, что $p_{cr} < 1$. Из элементарных топологических соображений (формальное доказательство см. [45]) вытекает, что при отсутствии протекания «+1» на бесконечность, существует бесконечное число «запирающих», т. е. составленных из «-1» связных гиперповерхностей, охватывающих начало координат.

Если быть более точным, каждая такая «запирающая» поверхность должна порождаться конечным подмножеством множества D^- (составленного из «-1»), допускать триангуляцию на элементарные тетраэдры с вершинами в этих точках и не иметь самопересечений. Элементарным тетраэдром при этом мы называем тетраэдр, образованный любыми v вершинами кубической ячейки Z^v .

В простейшем случае $v=2$, «запирающая» поверхность превращается в контур без самопересечений, охватывающий начало координат и образованный ребрами и диагоналями единичных квадратов.

Если C_n — событие, состоящее в том, что существует «запирающая» поверхность, порожденная n «отрицательными» узлами, то легко показать, что

$$P(C_n) \leq q^n \cdot n \cdot C^n, \quad (3)$$

где $C = C(v)$ — некоторая комбинаторная постоянная. Можно, например, считать, что $C(v) = 3^v - 2$, множитель n появился из-за

того, что поверхность не проходит в точности через точку $x_0=0$. Поэтому при

$$q < 1/C(v) \quad (4)$$

по той же лемме Бореля—Кантелли происходит п. н. лишь конечное число событий C_n , т. е. п. н. «+1» протекают на бесконечность. Это значит, что $p_{cr} \leq 1 - 1/C(v)$. Итак, скажем, в случае $v=2$ мы установили, что $1/3 \leq p_{cr} \leq 6/7$.

Один из путей уточнения этой оценки — чисто комбинаторный. Можно попытаться найти лучшие границы для числа самонепересекающихся путей длины n или для числа запирающих n -поверхностей. Легко, например, понять, что если в решетке Z^v , $N_n(v)$ — число самонепересекающихся путей длины n , идущих по ребрам решетки и выходящих из фиксированной точки $x_0=0$, то существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{N_n(v)} = a(v) \quad (5)$$

— так называемая константа связности решетки. Методам ее оценки было посвящено много работ (см., например [51]). Установлено, в частности, что $2,5 < a(2) < 2,7$.

Просматривая приведенные выше контурные рассуждения, убеждаемся, что

$$p_{cr} \geq 1/a(v) > 1/(2v-1). \quad (6)$$

Точно так же может быть уточнена и верхняя оценка, хотя соответствующая комбинаторика сложнее.

Заметим, что нижние оценки p_{cr} , выведенные ниже для Z^v с очевидными видоизменениями, применимы к любому однородному графу. Что касается верхних оценок, то здесь ситуация сложнее, поскольку строение «запирающих» множеств в общем случае может быть весьма экзотическим.

Методы оценок p_{cr} , основанные, в частности, на дальнейшем развитии контурного метода (метод поколений) — см. ниже, — там же будут приведены и данные по точно решаемым моделям.

Базовые модели допускают многочисленные и более реалистичские, с точки зрения приложений, обобщения. Перечислим простейшие из них.

а) Бернуллиевская перколяция на однородных графах (при этом допускаются как задачи связей, так и узлов).

б) Отказ от бернуллиевости для Z^v . Здесь очень интересны гиббсовские модели $\xi(x)$ с финитным потенциалом взаимодействия.

в) Пуассоновские модели в R^v , $v \geq 2$. Они определяются однородным пуассоновским множеством точек $\{x_i\}$ с параметром λ и набором, вообще говоря, случайных и случайно ориентированных множеств S_i , отнесенных каждому «дефектному

центру» x_i . Качественный анализ этих моделей проводится обычно с помощью «дискретизации», т. е. редукции к моделям а).

г) Случайные однородные поля $\xi(x)$ с непрерывными или гладкими реализациями в R^v . Типичные задачи: строение линий уровня, перколяция первого достижения и прочее. Как и в пункте в) решающим обстоятельством является возможность сведения к решетчатым схемам протекания.

д) Многомасштабные модели. Их можно понимать, как гибрид моделей пункта в) и классических базовых моделей.

Обзору исследований по этим моделям посвящена статья. Ее основу составляют работы, выполненные участниками семинара по теории перколяции и ее приложениям, который уже несколько лет работает на механико-математическом факультете МГУ. Отметим, что в работах на русском языке отсутствовало мало-мальски подробное изложение основных понятий и результатов этой теории на математическом уровне строгости. Правда, намеченная на 1986 год публикация перевода монографии Кестена [45] в определенной степени восполнит этот пробел. Следует, однако, подчеркнуть, что эта монография в основном посвящена углубленному изучению сравнительно узкого класса моделей: задач узков и связей на двумерных решетках и многие предложенные там методы с трудом поддаются обобщениям.

Мы старались, чтобы наш обзор по возможности не дублировал книгу Кестена. Изложение сравнительно подробное, многие результаты приведены с доказательствами или же их доказательства намечены. Особенно это относится к тем из них, которые ранее публиковались лишь в виде кратких заметок.

Краткое содержание обзора. В § 1 введена общая схема перколяции на счетном однородном графе (вообще говоря, ориентированном), даны определения различных параметров, характеризующих модели узлов и связей (пороги протекания p_n , p_T , p_B и т. п.)

В § 2 собран материал по точно решаемым перколяционным моделям (однородные деревья, классические двумерные решетки). Изложение очень краткое, поскольку именно эти вопросы основные в цитированной монографии Кестена.

В §§ 3, 4 развиваются методы получения верхних и нижних оценок критических порогов протекания на графах. Подобно тому, как контурный метод связан с аппроксимацией процесса развития дефектного кластера ветвящимся процессом с одним типом частиц, излагаемый в § 3 метод поколений вводит более тонкую аппроксимацию ветвящимися процессами с несколькими типами частиц.

Метод проектирования (§ 4), основанный на сравнении порогов протекания для двух графов (один из которых получает-

ся из другого определенной склейкой вершин), позволяет, в частности, установить, что в высоких размерностях порог протекания (и в задаче связей и в задаче узлов), мал и имеет асимптотику (на решетке Z^v)

$$p_{cr} = O(1/v).$$

В § 5 приведен обзор наиболее важных результатов технического аппарата перколяционной теории, полученных школой Кестена (формула Руссо, FKG-неравенство, его обращение, полученное Ван-ден-Бергом и т. п.).

В § 6 содержится доказательство центрального результата обзора — теорема М. В. Меншикова о совпадении критических порогов протекания p_H , p_S , p_T для очень широкого класса графов. Для сравнения заметим, что аналогичный результат Кестена относился лишь к двумерным мозаикам и не покрывал даже класса планарных однородных графов.

В § 7 (главным образом, по работам Кестена и его учеников, включая новейшие) перечисляются математические строгие результаты, относящиеся к поведению дефектного кластера вблизи критической точки. Физическая теория, основанная на идеологии подобия (скейлинга), вводит в перколяцию целый ряд критических индексов, характеризующих степенные законы изменения вблизи p_{cr} таких величин, как средний объем конечно-го кластера (при $p < p_{cr}$) или плотность бесконечного кластера при $p > p_{cr}$. и т. п. Несмотря на сложность этих вопросов, первые шаги к обоснованию скейлинговой программы сделаны.

В § 8 результаты предыдущих §§ 3—6 перенесены на случай непрерывных пуассоновских моделей типа, обсуждавшихся в первой части введения. Перенос основан на идее дискретизации, сводящей задачу шаров в R^v к задаче узлов на некотором графе, который получается из Z^v введением «далеких связей». Уже этот пример показывает, насколько полезны теоремы о графах общего вида.

Здесь же содержится обсуждение (правда лишь для двумерного случая) физической гипотезы об универсальности координационной константы β_{cr} , дающей среднее число соседей на пороге просачивания. Доказано, что для одинаковых фигур S_i эта величина заключена между двумя абсолютными границами.

В § 9 обсуждается вопрос о строении линий уровня однородных непрерывных полей в R^v , $v \geq 2$. Для широкого класса таких полей установлено, что всплески поля над достаточно высоким уровнем распадаются на непересекающие компакты (т. е. не перколируют), а их дополнение просачивается на бесконечность.

Здесь же приведены простейшие результаты по перколяции первого достижения, играющей важную роль в теории осреднения случайных сред (см. первую часть введения).

Заключительный § 10 содержит обзор результатов по много-масштабным схемам перколяции, которые показывают, что попытки применить к сложно организованным случайным средам (типа геофизических) результаты простейших (базовых) моделей протекания могут приводить к грубым ошибкам.

§ 1. Постановка дискретных задач теории перколяции

Рассматриваются ориентированные бесконечные связные графы G без петель со счетным множеством вершин (узлов) $V = \{v\}$ и дуг $\Sigma = \{\varepsilon\}$. Допускаются и неориентированные графы, это графы, у которых $(v_i, v_j) \in \Sigma$ тогда и только тогда, когда $(v_j, v_i) \in \Sigma$. Для таких графов вместо пары дуг $(v_i, v_j), (v_j, v_i)$ удобно рассматривать ребро $\{v_i, v_j\}$. Относительно графа G предполагаются выполненными еще два условия.

Условие I. (вершинная симметричность). Граф G имеет k типов вершин, т. е. $V = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_k$; $V_i \cap V_j = \emptyset$ при $i \neq j$, и для каждой пары вершин $v, v' \in V_i$ существует автоморфизм, переводящий v в v' , сохраняющий подмножества V_1, V_2, \dots, V_k .

Условие II. Степень каждой вершины графа G конечна.

Пример 1 (Периодические решетки в \mathbb{R}^d). В [43] рассматривается перколяция на графе G , который удовлетворяет следующим четырем условиям:

1) G вложен в \mathbb{R}^d так, что каждый координатный вектор \mathbb{R}^d является периодом графа;

2) Существует такое конечное z , что степень каждой вершины (т. е. число ребер графа, из нее выходящих) не превышает z ;

3) Все ребра графа G имеют конечную длину и всякий компакт в евклидовом пространстве \mathbb{R}^d содержит лишь конечное число ребер графа;

4. G — связный граф.

Как легко видеть, понятие периодических решеток вкладывается в более общее построение, описанное выше, и все основные результаты данной работы автоматически переносятся на периодические решетки.

Пример 2 (Направленная перколяция). Рассматриваются периодические решетки, в которых каждому ребру приписано направление, что также вписывается в понятие ориентированного графа, введенное выше.

Пример 3 (Решетки Бете). Рассматривается бесконечное дерево с коэффициентом ветвления r (т. е. степень каждой вершины равна $r+1$). Очевидно, что условие I (при $k=1$) и условие II для такого графа выполнены.

Рассмотрим на множестве V вершин графа G независимое случайное поле. Каждой вершине $v \in V$ припишем одно из двух значений либо $+1$, либо -1 . Тогда пространством элементарных событий будет

$$\Omega_V = \prod_{v \in V} \{+1, -1\}.$$

Произвольную точку или конфигурацию из Ω_V будем обозначать через $\omega = \{\omega(v)\}_{v \in V}$. В качестве σ -алгебры B_V возьмем σ -алгебру, порожденную цилиндрическими множествами в Ω_V

$$\{\omega : \omega(v_1) = e_1, \omega(v_2) = e_2, \dots, \omega(v_n) = e_n\}; \quad v_i \in V, \quad e_i = \pm 1.$$

Вероятностная мера на B_V задается произведением

$$P_V = \prod_{v \in V} \mu_v,$$

где $\mu_v(\omega(v) = +1) = p(v)$, $\mu_v(\omega(v) = -1) = 1 - p(v)$. Если $\omega(v) = +1$, то вершину v назовем занятой (дефектной), а в противном случае — свободной. Для занятой вершины $v \in V$ кластером $W(v)$ назовем множество занятых узлов $v' \in V$, достижимых из v по цепочкам занятых узлов v_1, v_2, \dots, v_k , где $(v, v_1), (v_1, v_2), \dots, (v_{k-1}, v_k), (v_k, v')$ являются дугами графа. Через $|W(v)|$ будем обозначать число узлов в этом кластере (возможен случай, когда $|W(v)| = \infty$).

Пример 4 (Задача связей). Иногда вероятности вводят не на вершинах, а на дугах графа G . Две дуги являются при этом связанными, если конец одной совпадает с началом другой. Легко видеть, что эта задача сводится к рассматриваемой: достаточно перейти к графу G^* , вершинами которого являются ребра графа G , а дугами — пары связанных дуг графа G .

Пример 5 (Смешанная задача). Вероятности можно задавать одновременно и на вершинах и на дугах. Ясно, что и в этом случае задача сводится к исходной.

Важной перколяционной характеристикой данного графа является вероятность принадлежности точки v бесконечному кластеру

$$\theta(v) = P_{P_V} \{ |W(v)| = \infty \}. \quad (1.1)$$

Относительно меры P_V будем предполагать, что для всех вершин $v \in V$: $p(v) = p_i$, $i = 1, 2, \dots, k$. Вектор $\vec{p} = (p_1, p_2, \dots, p_k) \in [0, 1]^k$ задает, таким образом, вероятностное распределение $P_{\vec{p}}$.

В [45] доказано, что для любой фиксированной вершины v неравенство $\theta(v) = \theta(\vec{p}, v) > 0$ справедливо тогда и только тогда, когда $\theta(\vec{p}, v) > 0$ для всех $v \in V$. А из равенства $E_{\vec{p}} \{ |W(v')| \} < \infty$ для некоторой вершины v' следует, что $E_{\vec{p}} \{ |W(v)| \} < \infty$ для любой вершины $v \in V$.

Определим множество

$$H = \{ \vec{p} \in [0, 1]^k \mid \theta(\vec{p}, v) = 0, \forall v \in V \}.$$

Оно обладает тем свойством, что при $\vec{p} \in H$ бесконечного кластера почти наверное нет, а при $\vec{p} \in [0, 1]^k \setminus H$ бесконечный кластер почти наверное существует (при этом говорят, что имеет место протекание).

Введем также множество

$$T = \{\vec{p} \in [0, 1]^k \mid E_{\vec{p}}\{|W(v)|\} < \infty\},$$

где $E_{\vec{p}}(\cdot)$ — математические ожидания по мере $p_{\vec{v}}$.

Для графов, которые являются периодическими решетками, в \mathbb{R}^d определяется множество S .

Пусть $\sigma_{\vec{p}}(B(n, i))$ — вероятность того, что в параллелепипеде $B(n, i) = [0, 3n] \times [0, 3n] \times \dots \times [0, n] \times \dots \times [0, 3n]$ (здесь $[0, n]$ стоит в i -й компоненте декартового произведения) существует кластер, пересекающий $B(n, i)$ в направлении i -й координаты, т. е. от грани $[0, 3n] \times \dots \times \{0\} \times \dots \times [0, 3n]$ до грани $[0, 3n] \times \dots \times \{n\} \times \dots \times [0, 3n]$.

Пусть

$$S = \{\vec{p} \in [0, 1]^k \mid \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{\vec{p}}(B(n, i)) = 0, 1 \leq i \leq d\}.$$

Легко видеть, что $T \subseteq H$. Фундаментальный результат Кестена [45] состоит в том, что $T = S$. В однопараметрическом случае ($\vec{p} = (p, p, \dots, p)$) этот результат можно сформулировать в терминах трех критических точек: $p_T = p_S \leq p_H$, где

$$\begin{aligned} p_T &= \sup \{p \in [0, 1] \mid E_p\{|W(v)|\} < \infty\}, \\ p_S &= \sup \{p \in [0, 1] \mid \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_p(B(n, i)) = 0, 1 \leq i \leq d\}, \\ p_H &= \sup \{p \in [0, 1] \mid \theta(p, v) = 0\}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Причем, критические точки p_T и p_H определены для однопараметрической задачи протекания на произвольном вершинно-симметричном графе G , а точка p_S — лишь для решеток, вложенных в \mathbb{R}^d .

Рассмотрение трех критических точек p_T , p_S , p_H объясняется следующим. С помощью численного моделирования получают приближенные значения порога p_S . Излагаемый ниже метод поколений дает теоретически сколь угодно точную оценку для p_T . Наконец, наибольший теоретический интерес представляет точка p_H , как точка фазового перехода в задаче перколяции.

Одним из основных результатов, изложенных в настоящей работе, является теорема о совпадении критических точек $p_H = p_T$ для введенных вершинно-симметричных графов (в том числе и для периодических решеток, вложенных в \mathbb{R}^d).

§ 2. О точных значениях критических вероятностей

Как ни удивительно, первые действительно строгие доказательства точных равенств для критических вероятностей были получены только в 80-е годы. Графы, для которых это удалось сделать, принадлежат к числу мозаик. Под мозаикой мы понимаем периодическую решетку, уложенную на плоскости без пересечений ребер (т. е. отрезки прямых, соединяющие соседние вершины, не пересекаются). Такая укладка порождает разбиение плоскости на многоугольники, т. е. мозаику. Естественно, что среди перколяционных задач внимание исследователей в первую очередь привлекли решетки, соответствующие регулярной укладке на плоскости правильных многоугольников — квадратов, треугольников, шестиугольников.

Кестен в 1980 г. [44] доказал, что в задаче связей для квадратной решетки

$$p_H = p_T = p_S = 1/2. \quad (2.1)$$

Он же [45] доказал, что для любой периодической мозаики, разбивающей плоскость на треугольники и имеющей ось симметрии,

$$p_H = p_T = p_S = 1/2. \quad (2.2)$$

Виерман [55] доказал, что в задаче связей для правильной треугольной мозаики

$$p_H = p_T = p_S = 2 \sin \frac{\pi}{10} \approx 0,347, \quad (2.3)$$

а в задаче связей для правильной шестиугольной мозаики

$$p_H = p_T = p_S = 1 - 2 \sin \frac{\pi}{10} \approx 0,653. \quad (2.4)$$

Более ранние доказательства результатов (2.1), (2.3), (2.4) в работе [51] не были строгими. Некоторые другие точные результаты см. в [49, 57].

В действительности, результаты (2.1) и (2.2) являются частными случаями более общего утверждения, использующего понятие дуальности графов. Назовем мозаичным графом периодическую решетку, полученную из мозаики на плоскости дополнительным проведением в некоторых ее многоугольниках всех диагоналей. Тогда дуальным к мозаичному графу будет граф, полученный из той же мозаики проведением всех диагоналей в остальных многоугольниках. Кестен [45] доказал, что для пары дуальных графов G и G^* , чье изображение на плоскости симметрично относительно оси абсцисс, справедливо соотношение

$$p_H(G) = p_T(G) = p_S(G) = 1 - p_H(G^*) = 1 - p_T(G^*) = 1 - p_S(G^*). \quad (2.5)$$

В частности, если графы G и G^* изоморфны (в таком случае граф G называется самодуальным), то

$$p_H(G) = p_T(G) = p_S(G) = 1/2. \quad (2.6)$$

Соотношения (2.1) и (2.2) являются частными случаями (2.6), но можно привести и другие примеры самодуальных мозаичных графов.

Обобщение понятия дуальности на ориентированные графы см. в [58].

Давно известен другой класс графов (не являющихся периодическими решетками в R^d), для которых могут быть точно вычислены не только критические вероятности, но и другие перколяционные характеристики. Это — решетки Бете, т. е. бесконечные деревья, удовлетворяющие условиям I и II (см. § 1). Нахождение их перколяционных характеристик оказывается возможным, благодаря наличию рекуррентных соотношений для них. Например, для решетки Бете с коэффициентом ветвления r (степень каждой вершины равна $r+1$) нетрудно найти, что

$$p_H = p_T = 1/r,$$

$$E_p\{|W|\} = \frac{p(1+r)}{1-rp} \text{ при } p < 1/r,$$

а плотность бесконечного кластера $\theta(p) = P_p\{|W| < \infty\}$ удовлетворяет уравнению

$$\theta(p) = p(1 - (1 - \theta(p))^r),$$

откуда

$$\theta(p) \approx \frac{2r}{r-1} (p - 1/r) \text{ при } p \searrow 1/r.$$

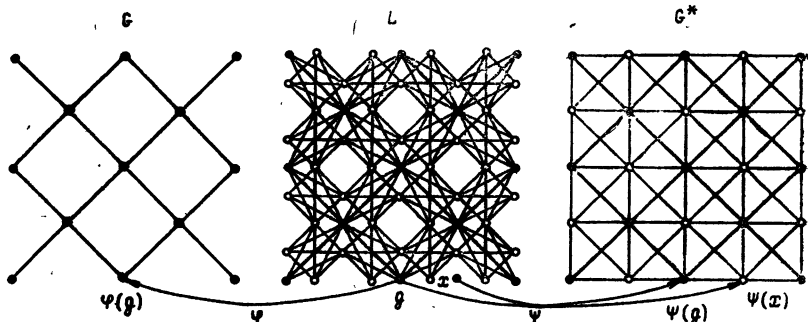
Также благодаря наличию рекуррентных соотношений, можно точно находить перколяционные характеристики и для других вершинно-симметричных графов, получаемых из бесконечных деревьев добавлением новых связей.

Кроме некоторых мозаичных графов и графов, близких к деревьям, ни для каких других графов (удовлетворяющих условиям I и II) не удалось пока найти точное значение критической вероятности. Так, наилучшим достижением для квадратной решетки на плоскости является результат работы [54]:

$$P_H > 0,503478. \quad (2.7)$$

Его доказательство мы сейчас приведем.

Рассмотрим перколяционную задачу на графе L (см. рис.), где вероятность занятости черного узла равна P , а белого узла — $p' = 1 - (1 - p)^{1/4}$. По каждой конфигурации свободных и занятых узлов на L построим конфигурации на двух других графах G и G^* , согласно следующим правилам (см. рис.).



1) На G : узел $\varphi(g)$ занят тогда и только тогда, когда занят узел g или заняты не менее 3 из 4 ближайших к нему белых узлов. Таким образом, $\varphi(g)$ занят независимо от других узлов графа G с вероятностью $p + (1-p)(4-3p')(p')^3$.

2) На G^* : черный узел $\Psi(g)$ занят тогда и только тогда, когда узел g занят; белый узел $\Psi(x)$ занят тогда и только тогда, когда занят хотя бы 1 из 4 окружающих точку x белых узлов. Таким образом, любой узел графа G^* занят независимо от других с вероятностью p .

Заметим теперь, что бесконечному кластеру на G соответствует бесконечный кластер на L , а бесконечному кластеру на L — бесконечный кластер на G^* . Следовательно, протекание на G , где вероятность занятости узла равна

$$f(p) = p + (1-p)(4 - 3(1 - (1-p)^{1/4})) (1 - (1-p)^{1/4})^3,$$

влечет и протекание на G^* , где вероятность занятости узла равна p . Стало быть, если $p < p_H(G^*)$, то $f(p) \leq p_H(G)$. Отсюда $f(p_H(G^*)) \leq p_H(G)$. Поскольку G и G^* — пара дуальных графов, то в силу соотношения (2.5), $p_H(G^*) = 1 - p_H(G)$. Окончательно получаем

$$f(1 - p_H(G)) - p_H(G) \leq 0,$$

откуда и вытекает оценка (2.7).

Для сравнения укажем, что по данным численного моделирования для квадратной решетки $p_H \approx 0,59$. (см. [29]).

§ 3. Метод поколений

В этом параграфе мы изложим метод, позволяющий теоретически получать сколько угодно точные нижние оценки для p_T , а следовательно, с учетом, что $p_T = p_H$, и для p_H . Кратко этот метод изложен в [13].

Свяжем с вершиной $v \in V$ следующий марковский процесс $\psi_v(t)$, $t = 0, 1, 2, \dots$. Вершине v припишем индекс поколения 0 и значение $\omega(v) = +1$ с вероятностью p и $\omega(v) = -1$ с вероятностью $q = 1 - p$. Если $\omega(v) = -1$, то построение процесса за-

кончено (v — поглощающее состояние). Если же $\omega(v) = +1$, то всем вершинам $v_i \in V$, связанным с v , припишем индекс поколения 1 и каждой независимо припишем значение $\omega(v_i) = +1$ с вероятностью p и $\omega(v_i) = -1$ с вероятностью q . Пусть процесс $\Psi_v(t)$ уже построен до момента $t = n$. Пусть Y_i — множество вершин с индексом поколения i . Тогда множество всех помеченных вершин $Y^n = v \cup Y_1, Y_2, \dots \cup Y_n$. Через Y_{n+1} обозначим множество вершин u графа G , связанных с занятыми вершинами из Y_n и не принадлежащих Y^n . Этим вершинам приписываем индекс поколения $n+1$ и одно из значений $+1$ или -1 описанным выше способом. Если Y_n не пусто, а $Y_{n+1} = \emptyset$, то состояние Y^n является поглощающим. Состоянием E этой цепи Маркова является допустимый набор вершин с пометками (индекс поколения и значения $+1$ или -1). Отметим, что в любом непоглощающем состоянии процесс $\Psi_v(t)$ находится не более одного раза. Множество поглощающих состояний обозначим через B .

Следующая лемма показывает эквивалентность положительности $\theta_v(p)$ для задачи перколяции на графе G и непоглощаемость процесса $\Psi_v(t)$ с положительной вероятностью.

Лемма 3.1. $\theta_v(p) > 0$ тогда и только тогда, когда $\lim_{t \rightarrow \infty} P(\Psi_v(t) \in B) < 1$. Доказательство автоматически следует из независимости случайного поля, заданного на графе G .

Обозначим через $\xi^m(v)$ случайную величину, равную числу занятых вершин, которым приписан индекс m -го поколения. Тогда

$$\xi^m(v) = \xi_1^m(v) + \xi_2^m(v) + \dots + \xi_k^m(v),$$

где $\xi_i^m(v)$ — число занятых вершин i -го типа m -го поколения процесса $\Psi_v(t)$. Из вершинной симметричности графа G следует, что распределения случайных величин $\xi_i^m(v)$ одинаковы для всех v , принадлежащих одному типу при фиксированных m и i . Обозначим: $M_{ij}^m = E_p\{\xi_j^m(v)\}$, где $v \in V_i$. Другими словами, M_{ij}^m — среднее число потомков j -го типа в m -ом поколении при условии, что начальная вершина i -го типа. Таким образом, при фиксированном m мы имеем матрицу размера $k \times k$:

$$M^m = \begin{pmatrix} M_{11}^m & M_{12}^m & \dots & M_{1k}^m \\ M_{21}^m & M_{22}^m & \dots & M_{2k}^m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ M_{k1}^m & M_{k2}^m & \dots & M_{kk}^m \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

В дополнение к критическим вероятностям p_H и p_T введем

$$p_M = p_M(G) = \sup \{p: p \in [0, 1], \inf_{m \in \mathbb{Z}_+} \lambda_m < 1\}, \quad (3.2)$$

где λ_m — максимальное собственное значение матрицы M^m .

Теорема 3.1. $p_T = p_M$.

Доказательство. Набору случайных величин $\{\xi_j^m(v)\}$ и матрице M^m при фиксированном m можно сопоставить ветвящийся процесс с k типами частиц, где $\xi_j^m(v)$, $v \in V_i$ обозначает случайное число потомков j -го типа у частицы i -го типа в 1-ом поколении, и деление частиц происходит независимо. В теории ветвящихся процессов с несколькими типами частиц известен следующий результат (см. [25]): если максимальное собственное значение соответствующей матрицы, описанной выше, меньше или равно 1, то ветвящийся процесс вырождается с вероятностью 1, независимо от начальных условий.

Возьмем произвольное $p < p_M$. Тогда существует такое m , что наибольшее собственное значение λ_m матрицы M^m меньше 1. Следовательно, соответствующий ветвящийся процесс вырождается с вероятностью 1. Кроме того, этот ветвящийся процесс мажорирует процесс $\Psi_v(t)$ в том смысле, что из его вырождения с вероятностью 1 следует, что $\lim_{t \rightarrow \infty} P(\Psi_v(t) \in B) = 1$. Мало того, $E_p(\xi^n(v)) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ экспоненциально по n , т. е. существуют $a, \alpha > 0$, что для любого n

$$E_p\{\xi^n(v)\} < a \exp\{-\alpha n\}. \quad (3.3)$$

Учитывая, что $|W(v)| = \sum_{i=1}^{\infty} \xi^i(v)$ и неравенство (3.3), заключаем что для $p < p_M$

$$E_p\{|W(v)|\} = \sum_{i=1}^{\infty} E_p(\xi^i(v)) < \infty,$$

и, следовательно, $p_M \leq p_T$.

Если же взять $p > p_M$, то ряд $\sum_{i=1}^{\infty} E_p(\xi^i(v))$ оказывается расходящимся, что приводит к неравенству $p_M \geq p_T$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Теоретически величину p_M можно вычислить сколь угодно точно, так как элементы матрицы математических ожиданий числа занятых вершин m -го поколения выписываются явно в виде многочлена от p . Однако для больших m эта задача очень трудоемка. Наиболее эффективен метод для графов, где все вершины симметричны. В этом случае процесс перколяции мажорируется ветвящимся процессом с одним типом частиц. К таким графам можно отнести, например, обычную квадратную решетку или решетку с диагоналями и т. д. С помощью ЭВМ для обычной квадратной решетки был найден явный вид $M^7(p)$, что позволило получить оценку: $p_H \geq 0,464$. Дальнейший подсчет требовал очень большого машинного вре-

мени. На сегодняшний день известна оценка $p_H > 0,503$ (см. § 2). Эта оценка получена довольно тонкими комбинаторными методами, опирающимися на симметричность решетки. Метод же поколений универсален и он применим к любым графам, независимо от их вложимости в R^d .

§ 4. Метод проектирования

Опишем метод, позволяющий сравнивать точки перколяций для различных решеток, а также получать верхние оценки для перколяционных задач. Кратко этот метод изложен в [13]. Ранее в [16] применен метод получения асимптотики перколяционного порога в задаче направленного протекания, идейно похожий на излагаемый в данной работе. В 1985 году этот метод перестроили в [36]. Описание метода проведем на примере гиперкубической решетки G_n . Результатом применения этого метода будут оценки перколяционного порога $p_H(G_n)$.

Теорема 4.1.

$$p_H(G_3) \leq 1/2, \quad (4.1)$$

$$p_H(G_4) < 1/2, \quad (4.2)$$

$$c_2/n \leq p_H(G_n) \leq c_1/n, \quad (4.3)$$

где c_1 и c_2 — константы, не зависящие от n .

Доказательство. Рассмотрим трехмерную решетку G_3 в R^3 . Поместим начало координат естественной системы координат в вершину v . Проведем прямую $z = x/k_1 = y/k_2$ (k_1 и k_2 — целые). Из каждой вершины G_3 проведем прямую, параллельную построенной. Проведем построение процесса $\tilde{\Psi}_v(t)$, аналогичного процессу $\Psi_v(t)$ из предыдущего параграфа, но с дополнительными ограничениями: каждой прямой, проведенной выше, принадлежит не более одной вершины с приписанным индексом. В дальнейшем нижний индекс v будем опускать. Пусть $\tilde{\Psi}_v(t)$ построен до момента времени $t = m$. Индекс $(m+1)$ -го поколения припишем тем вершинам решетки G_3 , которые 1) являются соседними к занятым вершинам m -го поколения; 2) не принадлежат Y^m ; 3) не принадлежат ни одной прямой, описанной выше, инцидентной вершинам Y^m ; 4) если одновременно несколько вершин удовлетворяют условиям 1)–3) и инцидентны одной прямой, то мы припишем индекс m -го поколения лишь одной из них (например, рандомизацией). Остальное построение аналогично процессу $\Psi(t)$.

Обозначим B и \tilde{B} , соответственно, множество поглощающих состояний процессов $\Psi(t)$ и $\tilde{\Psi}(t)$.

Лемма 4.1. Пусть $\lim_{t \rightarrow \infty} P(\tilde{\Psi}(t) \in \tilde{B}) < 1$. Тогда $\lim_{t \rightarrow \infty} P(\Psi(t) \in B) < 1$.

Введем в \mathbb{R}^3 новую систему координат, направив ось z_1 вдоль прямой $z = x/k_1 = y/k_2$, а оси x и y оставив прежними. Масштаб по оси z_1 можно ввести любой. Одновременно с процессом $\tilde{\Psi}(t)$ в \mathbb{R}^3 рассмотрим его проекцию $\tilde{\Psi}_\perp(t)$ на плоскость (x, y) вдоль оси z_1 . При этом множеству вершин Y^m в \mathbb{R}^3 , соответствующих состоянию процесса $\tilde{\Psi}(t)$ при $t=m$, однозначно соответствует множество вершин Y_\perp^m в \mathbb{R}^2 , т. е. состояние процесса $\tilde{\Psi}_\perp(t)$ при $t=m$. Отметим следующий важный факт. Положение проекции $\tilde{\Psi}_\perp(t)$ в момент времени $t=m+1$ зависит лишь от положения проекции $\tilde{\Psi}_\perp(t)$ при $t=m$, т. е.

$$P(\tilde{\Psi}_\perp(m+1) = E_\perp / \tilde{\Psi}(m)) = P(\tilde{\Psi}_\perp(m+1) = E_\perp / \tilde{\Psi}_\perp(m)), \quad (4.4)$$

где E_\perp — проекция произвольного состояния E цепи $\tilde{\Psi}(t)$ при $t=m+1$.

Для процесса $\tilde{\Psi}(t)$ аналогично введем множество поглощающих состояний \tilde{B}_\perp .

Лемма 4.2. Пусть $\lim_{t \rightarrow \infty} P(\tilde{\Psi}_\perp(t) \in \tilde{B}_\perp) < 1$. Тогда

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(\tilde{\Psi}(t) \in \tilde{B}) < 1.$$

Процесс $\tilde{\Psi}_\perp(t)$ соответствует перколяционной задаче на квадратной решетке с двумя дополнительными связями. Две вершины (i, j) и (i', j') соединены ребром, если либо $|i-i'| + |j-j'| = 1$, либо $\begin{cases} i-i' = k_1, \\ j-j' = k_2, \end{cases}$ либо $\begin{cases} i-i' = -k_1, \\ j-j' = -k_2. \end{cases}$ Если положить $k_1 = k_2 = 1$, то получим обычную квадратную решетку с одной диагональю, для которой $p_H = p_T = 1/2$. Таким образом, если взять $p > 1/2$, тогда $\lim_{t \rightarrow \infty} P(\tilde{\Psi}_\perp(t) \in \tilde{B}_\perp) < 1 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} P(\tilde{\Psi}(t) \in \tilde{B}) < 1 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} P(\Psi(t) \in B) < 1 \Rightarrow \theta(p) > 0 \Rightarrow p_H(G_3) \leq 1/2$. Первое утверждение теоремы 4.1 доказано.

Доказательство верхней оценки для $p_H(G_n)$ при $n \geq 4$ проводится вполне аналогично. Для этого, одновременно с процессом $\tilde{\Psi}^n(t)$, в \mathbb{R}^n рассматривается процесс $\tilde{\Psi}_\perp^{n-1}(t)$ в \mathbb{R}^{n-1} , который получается проектированием процесса $\tilde{\Psi}^n(t)$ на подпространство размерности $n-1$ вдоль прямой

$$x_n = x_1/k_1 = x_2/k_2, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 0, \dots, x_{n-1} = 0.$$

Меняя константы k_1 и k_2 , сводим проектирование вдоль соответствующих прямых на подпространства меньших размерностей $n-2$ раза. В результате получим процесс $\tilde{\Psi}_\perp^2(t)$ в \mathbb{R}^2 , отвечающий перколяционной задаче на квадратной решетке с $2n-4$ дополнительными связями (ребрами) у каждой вершины. Подбирая соответствующие прямые проектирования, можно добиться, что для вершины (i, j) соседними будут все вершины, лежащие внут-

ри квадрата со стороной $[\sqrt{2n}-1]$ и с центром в точке (i, j) . В частности, при $n=4$ приходим к квадратной решетке с двумя диагоналями, для которой $p_H = p_T < 1/2$ (см. [43, 45]), откуда следует (4.2).

Нижняя оценка в неравенстве (4.3) непосредственно получается при применении метода поколений. Перейдем к доказательству верхней оценки неравенства (4.3). Построим в \mathbb{R}^2 квадратную решетку с более редкими ячейками. Проведем образующие квадратной решетки параллельно осям x и y , но так, чтобы они не проходили через целочисленные прямые $y=k$ и $x=m$, $k, m \in \mathbb{Z}$, а длина ребра квадратной решетки $a = [\sqrt{2n}-1/2]$. В центр каждого квадрата поместим новый узел, при этом получим решетку \tilde{G} , конгруэнтную ранее построенной. Определим на ней случайное поле, индуцированное полем на квадратной решетке с $2n$ связями, следующим образом: вершине $v' \in \tilde{G}$ припишем значение $+1$, если в квадрате, в центр которого эта вершина помещена, содержится хотя бы одна вершина $v \in G$ со значением $+1$. Пусть N — число вершин, лежащих внутри квадрата, описанного выше. Тогда $p' = \mathbf{P}(\omega(v') = +1) = 1 - (1-p)^N$, $q' = \mathbf{P}(\omega(v') = -1) = (1-p)^N$. Вновь индуцированное поле по построению является независимым и для него существует критическая вероятность \tilde{p}_H : $0 < \tilde{p}_H < 1$.

Из существования бесконечного кластера на решетке \tilde{G} следует существование бесконечного кластера на решетке G . Следовательно, выполняется неравенство

$$\tilde{p}_H \geq 1 - (1-p_H)^N. \quad (4.5)$$

Из (4.5) после несложных выкладок получаем

$$p_H \leq \tilde{p}_H / N.$$

Учитывая, что $N > c \cdot n$, где константа c не зависит от размерности решетки n , доказываем верхнюю оценку неравенства (4.3). Заметим, что аналогичные в идейном плане соображения использовались при доказательстве теоремы 3.1 в [8].

Изложенный метод понижения размерности применим не только к гиперкубическим, но и к произвольным n -мерным решеткам, а также решеткам, где значение $+1$ или -1 приписывается ребрам (задача связей).

§ 5. Возрастающие события. Базовые неравенства. Формула Руссо

Рассмотрим вероятностное пространство (Ω_V, B_V, P_V) , введенное в § 1.

Определение. B_V — измеримая функция $f(\omega) : \Omega_V \rightarrow \mathbb{R}$ называется возрастающей (убывающей), если она возрастает

(убывает) в каждой $\omega(v)$, $v \in V$. Событие $A \subseteq B_v$ назовем возрастающим (убывающим), если ее характеристическая функция возрастает (убывает).

Примеры. 1) $|W(v)|$ — есть возрастающая функция, так как замена -1 на $+1$ в какой либо $v_1 \in V$ может лишь увеличить $|W(v)|$.

2) $A = \{\text{существует путь из занятых вершин на } G \text{ от } v_1 \text{ до } v_2\}$ есть возрастающее событие.

3) $D_n(v) = \{\text{существует путь из занятых вершин на } G \text{ от вершины } v \text{ до сферы } S_n(v)\}$ — возрастающее событие.

Для монотонных функций и событий мы сейчас приведем давно известное *FKG*-неравенство. В более общем случае оно изложено в статье [40] 1971 г.

FKG-неравенство. Если f и g — две ограниченные функции на Ω_v , которые зависят лишь от конечного числа координат ω , и обе являются возрастающими или убывающими функциями, тогда

$$E_v\{f(\omega) \cdot g(\omega)\} \geq E_v\{f(\omega)\} \cdot E_v\{g(\omega)\}. \quad (5.1)$$

В частности, если A и B — два возрастающих события, или два убывающих события, которые зависят лишь от конечного числа координат ω , тогда

$$P_v\{A \cap B\} \geq P_v\{A\} \cdot P_v\{B\}. \quad (5.2)$$

Доказательство этих неравенств несложно и можно прочитать, например, в [45].

Приведем пример на применение *FKG*-неравенства

$$\begin{aligned} P\{|W(v_1)| \geq n\} &\geq P\{\text{существует путь из занятых вершин из } v_1 \text{ в } v_2 \\ &\text{и } |W(v_2)| \geq n\} \geq P\{\text{существует путь из занятых вершин} \\ &\text{из } v_1 \text{ в } v_2\} \cdot P\{|W(v_2)| \geq n\}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Для связного графа G и $P(v) > 0$ для всех v выполняется неравенство

$$P\{\text{существует путь из занятых вершин из } v_1 \text{ в } v_2\} > 0. \quad (5.4)$$

Выполнение неравенств (5.3) и (5.4) приводит к следующему:

$$\begin{aligned} \text{из } \Theta(v_2) > 0 \text{ следует } \Theta(v_1) > 0, \\ \text{из } E\{|W(v_2)|\} = \infty \text{ следует } E\{|W(v_1)|\} = \infty. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Откуда следует, что критические точки ρ_T , ρ_H , введенные в § 1, не зависят от выбора вершины v .

Мы сейчас приведем неравенство, обратное к *FKG*-неравенству для так называемых событий с «раздельной» реализацией. В более общей постановке это изложено в [35]. А в [33] дано красивое прямое доказательство для частного случая. Это доказательство проходит и для случая, исследуемого в § 6.

Пусть $\Omega = \{-1, 1\}^n$. Для произвольных событий A и $B \in \Omega$ определим событие $A \square B$. Для конфигурации $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) \in \Omega$ ($\omega_i = \pm 1$) и $K \in \{1, 2, \dots, n\}$ положим $C(K, \omega)$ — цилиндрическое событие $\{\omega' : \omega' \in \Omega \text{ и } \omega'_i = \omega_i \text{ для всех } i \in K\}$. Положим $\bar{K} = \{1, 2, \dots, n\} \setminus K$. Тогда $A \square B = \{\omega : \exists K \in \{1, 2, \dots, n\} \text{ такой, что } C(K, \omega) \subset A, C(\bar{K}, \omega) \in B\}$.

Теорема. Если $A, B \in \Omega$ — возрастающие события, тогда

$$\mu(A \square B) \leq \mu(A) \cdot \mu(B). \quad (5.6)$$

Пример 1. Пусть v_1, v_2, v_3, v_4 — различные вершины графа G . Тогда

$$\begin{aligned} P\{\exists \text{ непересекающиеся пути из занятых вершин из } v_1 \text{ в } v_2 \\ \text{ и из } v_3 \text{ в } v_4\} = P\{\exists \text{ путь из } v_1 \text{ в } v_2 \square \exists \text{ путь из } v_3 \text{ в } v_4\} \leq \\ \leq P\{\exists \text{ путь из } v_1 \text{ в } v_2\} \cdot P\{\exists \text{ путь из } v_3 \text{ в } v_4\}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Последнее неравенство автоматически получается из (5.6), если мы рассматриваем лишь пути не длинее заданной величины l . Далее, устремляя l к бесконечности, доказываем неравенство (5.7).

Вторым примером применения неравенства (5.6) является неравенство (6.11) из § 6.

Определение. Пусть $E \in B_V$ — некоторое событие и $\omega \in \Omega_V$ — конфигурация. Вершину $v \in V$ мы будем называть существенной для (E, ω) , если изменение занятости этой вершины в конфигурации ω порождает поляризацию ω' , где $\omega' \notin E$ при $\omega \in E$ или $\omega' \in E$ при $\omega \notin E$.

Формула Руссо. Пусть $E \in B_V$ — возрастающее событие, тогда

$$\frac{\partial}{\partial p(v)} P_V(E) = P_V\{v \text{ является существенной для } (E, \omega)\}. \quad (5.8)$$

Пусть теперь p' и p'' — две функции, определенные на V и принимающие значения в $[0, 1]$ и

$$\begin{aligned} \mu_{vt}\{\omega(v) = 1\} &= 1 - \mu_{vt}\{\omega(v) = -1\} = \\ &= (1-t)p'(v) + tp''(v), \quad v \in V, \quad 0 \leq t \leq 1, \end{aligned} \quad (5.9)$$

$$P_{Vt} = \prod_{v \in V} \mu_{vt}. \quad (5.10)$$

Если $p'(v) \leq p''(v)$ для всех $v \in V$ и E является возрастающим событием, которое зависит лишь от занятости конечного числа вершин $W \in V$, тогда

$$\frac{d}{dt} P_{Vt}\{E\} = \sum_{v \in V} \{p''(v) - p'(v)\} P_{Vt}\{v \text{ — существенна для } E\} >$$

$$\inf_{v \in W} \{p''(v) - p'(v)\} E_{V_t} \{N(E)\}, \quad (5.11)$$

где $N(E)$ — число существенных точек события E и ω , $E_{V_t}(\cdot)$ — математическое ожидание по мере P_{V_t} .

Доказательство неравенств (5.8) и (5.11) мы приводить не будем. Простое доказательство содержится, например, в [45], впервые изложено в [50].

В случае, если $\inf_{v \in W} \{p''(v) - p'(v)\} = \alpha > 0$, неравенство (5.11) можно переписать

$$\frac{d}{dt} P_{V_t} \{E\} \geq \alpha E_{V_t} \{N(E)\}. \quad (5.12)$$

В дальнейшем это неравенство будет использовано при доказательстве теоремы о совпадении критических точек $p_T = p_H$.

§ 6. Совпадение критических точек

Мы, по-прежнему, будем рассматривать ориентированные бесконечные связные графы, введенные выше. Относительно графа G , кроме условий I, II (см. § 1), будем предполагать выполненным условие III, которое мы сейчас сформулируем.

Зафиксируем в графе G вершину v . Обозначим через $R_m(v)$ множество вершин, достижимых из v не более чем за m шагов; положим также $S_m(v) = R_m(v) \setminus R_{m-1}(v)$ ($m = 2, 3, \dots$); $S_1(v) = R_1(v)$.

Условие III. Существуют такие $c_1, a_1 > 0$ и $0 < \gamma_1 < 1$, что $R_n(v) < c_1 \exp\{a_1 n^{\gamma_1}\}$ для $\forall v \in V, n = 1, 2, \dots$

З а м е ч а н и е. Периодические решетки в R^n , рассматриваемые практически во всех перколяционных задачах, удовлетворяют всем условиям, наложенным нами на граф G .

На графе G мы будем рассматривать однопараметрическую задачу узлов, для которой выше введены критические вероятности p_H и p_T .

Обозначим через $D_n(v)$ событие, состоящее в том, что существует путь из занятых вершин, соединяющий v с одной из вершин, принадлежащей $S_n(v)$ (будем говорить, что произошло протекание до сферы $S_n(v)$).

Теорема 6.1. Пусть граф G удовлетворяет условиям I, II и $p < p_H$. Тогда существует такое $\alpha_1 = \alpha_1(p) > 0$, что при всех n

$$P_p \{D_n(v)\} < \exp\{-\alpha_1 n / \ln n\}. \quad (6.1)$$

Теорема 6.2. Пусть граф G удовлетворяет условиям I, II, III. Тогда для любого $p < p_H$ существует $a_2 > 0$, что при всех n и $v \in V$

$$P_p \{D_n(v)\} < \exp\{-a_2 n\}. \quad (6.2)$$

Теорема 6.3. Для графа G , удовлетворяющего условиям I, II, III, критические точки перколяций p_H и p_T совпадают: $p_H = p_T$.

Доказательство основной теоремы 6.1 будет разбито на ряд лемм.

Множество существенных точек данной конфигурации ω и события $D_n(v)$ будем обозначать через $N(D_n(v), \omega)$. Легко проверяется, что событие $D_n(v)$ — возрастающее. Следовательно, для семейства событий $D_n(v)$ можно применить формулу Руссо.

Возьмем произвольные \bar{p}_0, \bar{p}_1 ; $0 < \bar{p}_1 < \bar{p}_0 \leq 1$,

$$p(t) = t \cdot \bar{p}_0 + (1-t) \bar{p}_1, \quad 0 \leq t \leq 1; \quad p(0) = \bar{p}_1; \quad p(1) = \bar{p}_0. \quad (6.3)$$

Тогда вероятность события $D_n(v)$ при фиксированном n и узле v является функцией от t ($0 \leq t \leq 1$) и удовлетворяет неравенству

$$\frac{d}{dt} P_{p(t)}(D_n(v)) \geq \alpha E_{p(t)}\{N(D_n(v))\}, \quad t \in (0, 1), \quad (6.4)$$

где α — константа, зависящая от точек \bar{p}_0 и \bar{p}_1 . Выразив $E_p\{N(D_n(v))\}$ через условное математическое ожидание и проинтегрировав, получим следующие два неравенства:

$$\frac{d}{dt} P_{p(t)}(D_n(v)) \geq \alpha E_{p(t)}\{N(D_n(v))/D_n(v)\} \cdot P_{p(t)}(D_n(v)), \quad (6.5)$$

$$P_{\bar{p}_1}(D_n(v)) \leq P_{\bar{p}_0}(D_n(v)) \exp \left\{ -\alpha \int_0^1 E_{p(t)}\{N(D_n(v))/D_n(v)\} dt \right\}. \quad (6.6)$$

Основные трудности доказательства теоремы 6.1 состоят в оценке $E_{p(t)}\{N(D_n(v))/D_n(v)\}$.

Лемма 6.1. Для любого $p < p_H$, $v \in V \lim_{n \rightarrow \infty} P_p(D_n(v)) = 0$ и существует величина $\alpha_2 = \alpha_2(p)$, зависящая от p и независящая от n , такая, что

$$P_p(D_n(v')) \leq \alpha_2 P_p(D_n(v''))$$

для любых $v', v'' \in V$.

Доказательство. Пусть $v' \in V_i$, а $v'' \in V_j$. Существует такое k , не зависящее от i и j и такие две вершины $v_i \in V_i$ и $v_j \in V_j$, между которыми существует путь длины k . Тогда

$$P_p(D_n(v_i)) \geq p^k P_p(D_{n+k}(v_j)), \quad (6.7)$$

$$P_p(D_n(v_j)) \geq p^k P_p(D_{n+k}(v_i)). \quad (6.8)$$

Откуда и следует утверждение леммы 6.1.

Пусть для некоторой конфигурации событие $D_n(v)$ произошло. И пусть a_1, a_2, \dots, a_m — все существенные точки этой конфигурации. Следующая лемма дает геометрическую картину этой ситуации.

Лемма 6.2. Существенные точки можно занумеровать так, что все пути из занятых вершин от v до $S_n(v)$ пересекают эти точки в порядке их нумерации (по одному разу каждую) и для двух точек с соседними номерами существуют, по крайней мере, два непересекающихся на отрезке между ними пути.

Доказательство. Пусть для конфигурации ω событие $D_n(v)$ произошло. Тогда существует путь из вершины v до сферы S_n , проходящий все существенные точки; пусть $a_1, a_2, \dots, \dots, a_m$ расположены в порядке их прохождения. Но тогда и любой другой путь из занятых вершин проходит их в том же порядке. (Если предположить, что после a_i этот второй путь попадает в a_j , где $j > i+1$, то это означает, что вершина a_{i+1} не существенная.) Существование двух непересекающихся подпутей между двумя соседними существенными точками докажем по индукции. Без потери общности, пусть мы рассматриваем участок от v до a_1 . Так как событие $D_n(v)$ для данной конфигурации произошло, то существует путь из занятых вершин от v до S_n , и пусть $(v, b_1, b_2, \dots, b_r, a_1)$ — его участок от v до первой существенной точки. Так как b_1 — не существенная точка, то существует путь из v в a_1 , не проходящий через b_1 , и пусть b_k — первая из точек $\{b_i\}$, которая принадлежит этому пути. Если $b_k = a_1$ — то это означает, что существует хотя бы два пути из занятых вершин из v в a_1 . Пусть $b_k \neq a_1$. Это означает, что существуют два пути из v в a_1 , совпадающие на участке от b_k до a_1 и не пересекающиеся на участке от v до b_k . b_k не существенная точка, а следовательно, существует путь из v в a_1 , не проходящий через b_k . Из этого пути и двух ранее построенных образуем два новых пути из v в a_1 , которые не пересекаются до точки l , где $l \geq k+1$ и совпадают на участке $b_l, b_{l+1}, \dots, b_r, a_1$. Лемма доказана.

Пусть $a_1 \in S_{i_1}(v)$; $a_2 \in S_{i_2}(v)$, \dots , $a_m \in S_{i_m}(v)$. Положим $\xi_1 = i_1$; $\xi_2 = \max(i_2 - i_1, 0)$, \dots , $\xi_m = \max(i_m - i_{m-1}, 0)$. Пусть d_1, d_2, \dots, d_k — натуральные числа и $\sum_{i=1}^k d_i \leq n$.

Лемма 6.3. Существует такое $\alpha_2 > 0$, не зависящее от n , что

$$P_p(\xi_k > d_k / D_n(v), \xi_1 \leq d_1, \xi_2 \leq d_2, \dots, \xi_{k-1} \leq d_{k-1}) \leq \alpha_2 P_p(D_{d_k}(v)). \quad (6.9)$$

Докажем сперва лемму 6.3 для случая $k=1$, т. е. докажем неравенство

$$P_p(\xi_1 > d_1 / D_n(v)) \leq P_p(D_{d_1}(v)). \quad (6.10)$$

Очевидно следующее вложение множеств $\{\omega: \xi_1 > d_1; D_n(v)\} \subset \subset \{\omega: \text{существуют пути из занятых вершин из } v \text{ до сферы } S_n(v), \text{ и из } v \text{ до сферы } S_{d_1} \text{ и эти пути не имеют общих вершин}\}$.

Следуя обозначениям § 5, имеем

$$\begin{aligned} P_p \{ \omega : \xi_1 > d_1; D_n(v) \} &\leq P_p \{ D_{d_1}(v) \square D_n(v) \} \leq \\ &\leq P_p(D_{d_1}(v)) \cdot P_p(D_n(v)). \end{aligned} \quad (6.11)$$

Здесь мы использовали то, что $D_{d_1}(v)$ и $D_n(v)$ — возрастающие события, и вероятность их «раздельной» реализации удовлетворяет неравенству (5.6) из § 5.

Перейдем к доказательству общего случая леммы 6.3, когда $k > 1$. Пусть $\omega' \in \{ D_n(v) \cap \xi_1 \leq d_1, \xi_2 \leq d_2, \dots, \xi_{k-1} \leq d_{k-1} \}$ и пусть a_1, a_2, \dots, a_{k-1} — первые $k-1$ существенные точки события $D_n(v)$ и конфигурации ω' . Обозначим через $B_{k-1}(\omega')$ все занятые вершины графа G , которые достижимы из v по путям из занятых вершин, не содержащих вершину a_{k-1} . Через множество $[B_{k-1}(\omega')]$ обозначим объединение множества $B_{k-1}(\omega')$ со множеством граничных свободных вершин, т. е. тех вершин, которые достижимы из множества $B_{k-1}(\omega')$ за один шаг. Тогда множество всех конфигураций $\omega \in \{ D_n(v) \cap (\xi_1 \leq d_1, \dots, \xi_{k-1} \leq d_{k-1}) \}$ разобьется на классы, у которых одинаковая «предыстория» $[B_{k-1}(\omega')]$. При этом

$$\begin{aligned} &P \{ D_n(v) \cap (\xi_1 \leq d_1, \dots, \xi_{k-1} \leq d_{k-1}) \} = \\ &= \sum_{[B_{k-1}]} P_p([B_{k-1}]) \cdot P \{ \exists \text{ путь из занятых вершин от } a_{k-1} \\ &\text{до сферы } S_n(v), \text{ не имеющий общих вершин со множеством} \\ &\quad [B_{k-1}], \end{aligned} \quad (6.12)$$

где суммирование ведется по всем возможным «предысториям» $[B_{k-1}]$.

Аналогично равенству (6.12), имеем

$$\begin{aligned} &P \{ \xi_k > d_k \cap (D_n(v), \xi_1 \leq d_1, \xi_2 \leq d_2, \dots, \xi_{k-1} \leq d_{k-1}) \} \leq \\ &\leq \sum_{[B_{k-1}]} P_p([B_{k-1}]) \cdot P \{ \exists \text{ путь из занятых вершин от } a_{k-1} \\ &\text{до } S_n(v), \exists \text{ путь от } a_{k-1} \text{ до } S_{d_k}(a_{k-1}) \text{ и эти пути не имеют} \\ &\text{общих вершин между собой и с } [B_{k-1}] \} \leq \\ &\leq \sum_{[B_{k-1}]} P_p([B_{k-1}]) \cdot P \{ (\exists \text{ путь из занятых вершин от } a_{k-1} \\ &\text{до } S_n(v), \text{ не имеющих общих вершин с } [B_{k-1}]) \square \\ &\square (\exists \text{ путь из } a_{k-1} \text{ до } S_{d_k}(a_{k-1})) \} \leq \alpha_2 P_p(D_{d_k}(v)) \times \\ &\quad \times P_p \{ D_n(v) \cap (\xi_1 \leq d_1, \xi_2 \leq d_2, \dots, \xi_{k-1} \leq d_{k-1}) \}. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Из неравенства (6.13) автоматически следует утверждение леммы 6.3. При выводе (6.13) мы использовали лемму 6.1 и неравенство (5.6) § 5.

Лемма 6.4. Для любого $k \leq n$ при $d_2 P_p D_{[n/k]}(v) \leq 1$:

$$P_p \{N(D_n(v)) \geq k/D_n(v)\} \geq (1 - \alpha_2 P_p(D_{[n/k]}(v)))^k. \quad (6.14)$$

Доказательство. В обозначениях предыдущей леммы имеем:

$$\begin{aligned} P_p \{N(D_n(v)) \geq k/D_n(v)\} &\geq P_p \{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_k \leq n/D_n(v)\} \geq \\ &\geq P_p \left\{ \bigcap_{i=1}^k \xi_i \leq n/k/D_n(v) \right\} = P_p \{\xi_1 \leq n/k/D_n(v)\} \times \\ &\times P_p \{\xi_2 \leq n/k/D_n, \xi_1 \leq n/k\} \dots P_p \{\xi_k \leq n/k/D_n(v), \\ &\xi_1 \leq n/k \dots \xi_{k-1} \leq n/k\}. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Из леммы 6.3 следует, что каждый из сомножителей правой части неравенства (6.15) не меньше, чем $(1 - \alpha_2 P_p(D_{[n/k]}(v)))$. Из леммы 6.4 непосредственно вытекает

Лемма 6.5. Для любого $k \leq n$

$$E_p \{N(D_n(v))/D_n(v)\} \geq k(1 - \alpha_2 P_p(D_{[n/k]}(v)))^k. \quad (6.16)$$

Вероятность $P_p(D_n(v))$ не возрастает при росте n . Поэтому $\varphi_n(k) = k \cdot P_p(D_{[n/k]}(v))$ при фиксированном n есть возрастающая функция по k ($k=1, 2, \dots, n$). Пусть k_n определяется из соотношений

$$k_n \cdot P_p(D_{[n/k_n]}(v)) \leq 1; \quad (k_n + 1) \cdot P_p(D_{[n/(k_n+1)]}(v)) > 1. \quad (6.17)$$

Лемма 6.6. Существует $d > 0$, что для всех n

$$E_p \{N(D_n(v))/D_n(v)\} \geq d \cdot k_n. \quad (6.18)$$

Доказательство. В неравенство (6.16) вместо k подставим k_n , определяемое из соотношений (6.17); получим

$$\begin{aligned} E_p \{N(D_n(v))/D_n(v)\} &\geq k_n (1 - \alpha_2 P_p(D_{[n/k_n]}(v)))^{k_n} \geq \\ &> k_n (1 - \alpha_2/k_n)^{k_n} > k_n d. \end{aligned}$$

Замечание. Если $p < p_n$, то $P_p(D_n(v)) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Из определения числа k_n следует, что $k_n = k_n(p) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Следовательно, и $E_p \{N(D_n(v))/D_n(v)\} \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Однако только этого факта недостаточно для доказательства теоремы 6.1. Пока лишь, с учетом неравенства (6.6), для $\bar{p}_1 < \bar{p}_0 < p_n$ справедливо

$$P_{\bar{p}_1}(D_n(v))/P_{\bar{p}_0}(D_n(v)) \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Продолжим доказательство теоремы 6.1.

Положим

$$f_p(n) = f_p(D_n(v)) = 1/P_p(D_n(v)). \quad (6.19)$$

Лемма 6.7. Для любого $c_2 > 0$ существует $a_1 > 0$ и последовательность чисел $\{n_i\}$ ($n_i \rightarrow \infty$), что

$$f_{\bar{p}_1}(n_i) > a_1(n_i)^{c_2}. \quad (6.20)$$

Доказательство. Перепишем неравенство (6.6) в новых обозначениях:

$$f_{\bar{p}_1}(n) \geq f_{\bar{p}_0}(n) \exp \left\{ \alpha \int_0^1 E_{p(t)} \{N(D_n(v))/D_n(v)\} dt \right\}. \quad (6.21)$$

Пусть $0 \leq t'' < t' \leq 1$; $p(t') = p'$; $p(t'') = p''$, где $p(t)$ определено в (6.3). Тогда $p_1 \leq p'' < p' \leq p_0$ и $t' - t'' = p' - p'' / p_0 - p_1$.

Интегрируя неравенство (6.5) в пределах от t' до t'' и сделав замену $P_p(D_n(v))$ на $f_p(D_n)$, получаем

$$f_{p'}(n) \geq f_{p''}(n) \exp \left\{ \alpha \int_{t''}^{t'} E_{p(t)} \{N(D_n(v))/D_n(v)\} dt \right\}. \quad (6.22)$$

Определим рекуррентно три последовательности: $\{p_i\}$; $\{n_i\}$; $\{f_i\}$; $i = 0, 1, 2, \dots$.

$$p_0 = \bar{p}_0; \quad f_0 = f_{p_0}(n_0); \quad n_0 - \text{любое натуральное,} \\ f_i = f_{p_i}(n_i); \quad n_{i+1} = n_i [f_i]; \quad \Delta_i = p_{i+1} - p_i = c \ln f_i / f_i. \quad (6.23)$$

Тогда $[f_i]$ является корнем уравнения

$$x = [f_{p_i}(n_{i+1}/x)].$$

По лемме 6 получаем

$$E_{p_i} \{N(D_{n_{i+1}}(v))/D_{n_{i+1}}(v)\} \geq dk_{n_{i+1}}(p_i) = d \cdot [f_i]. \quad (6.24)$$

Далее из неравенства (6.22) следует

$$f_{i+1} = f_{p_{i+1}}(n_{i+1}) \geq f_{p_i}(n_{i+1}) \exp \{ \alpha \cdot \Delta_i \cdot d [f_i] \} \geq f_i^{c_1}, \quad (6.25)$$

где за счет выбора константы c в (6.23) можно добиться сколь угодно большого c_1 . Отметим, что при выводе (6.25) мы использовали тот факт, что для $p'' < p'$ справедливо неравенство

$$k_{p''}(D_n(v)) \geq k_{p'}(D_n(v)) \text{ при любом } n.$$

Выбрав c_1 достаточно большим, получаем сходящийся ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \Delta_i$.

Взяв n_0 достаточно большим, что приводит к тому, что и f_0 достаточно велико, добиваемся того, что $\sum_{i=1}^{\infty} \Delta_i < \bar{p}_0 - \bar{p}_1$, т. е. все

$$p_i \in [\bar{p}_1, \bar{p}_0].$$

Из (6.23) и (6.25) следует: $n_m = [f_{m-1}] \cdot [f_{m-2}] \dots [f_0] \cdot n_0$; $f_m \geq f_{m-1}^{c_1-1} \cdot f_{m-2}^{c_1-1} \dots f_1^{c_1-1} \cdot f_0$. Поскольку $f_{\bar{p}_1}(n) \geq f_{p_m}(n)$ при любом n , то можно указать такое a , что

$$f_{\bar{p}_1}(n_i) \geq f_{p_i}(n_i) \geq a_1(n_i)^{c_1-1}. \quad (6.26)$$

Лемма 6.7 доказана.

Хотя основные технические трудности в доказательстве теоремы 6.1 можно считать преодоленными, нам еще необходимо устранить недостаток неравенства (6.20).

Оно доказано лишь для некоторой подпоследовательности $\{n_i\}$ ($n_i \rightarrow \infty$).

Лемма 6.8. Для любого $\gamma_1 \in (0, 1)$ можно указать такое $a_2 > 0$, что

$$f_{\bar{p}_1}^-(n) > a_2 n^{\gamma_1}. \quad (6.27)$$

Доказательство. Пусть $\{p_i\}$, $\{n_i\}$, $\{f_i\}$ — уже введенные ранее последовательности и $\lim_{i \rightarrow \infty} p_i = \bar{p} > \bar{p}_1$. Возьмем n такое, что $n_{m-1} \leq n < n_m$. Выпишем последовательность очевидных неравенств

$$f_{\bar{p}_1}^-(n) \geq f_{\bar{p}}^-(n) \geq f_{p_{m-1}}(n) \geq f_{p_{m-1}}(n_{m-1}) = f_{m-1}. \quad (6.28)$$

Учитывая неравенство (6.26), получаем

$$f_{m-1}^{c_1} = f_{m-1}^{c_1-1} \cdot f_{m-1} \geq a_1^{c_1-1} \cdot f_{m-1}^{c_1-1} \cdot n_{m-1}^{c_1-1} = a_1 (f_{m-1} \cdot n_{m-1})^{c_1-1} \geq a_1 \cdot n_m^{c_1-1},$$

$$f_{m-1} \geq a_1^{1/c_1} \cdot n_m^{(c_1-1)/c_1},$$

откуда следует, что

$$f_{\bar{p}_1}^- \geq f_{\bar{p}}^-(n) \geq f_{m-1} \geq a_1^{1/c_1} \cdot n_m^{(c_1-1)/c_1} \geq a_1^{1/c_1} \cdot n^{(c_1-1)c_1}. \quad (6.29)$$

Учитывая, что за счет выбора начального n_0 можно добиться сколь угодно большого c_1 (лемма 6.7), из неравенства (6.29) следует утверждение леммы 6.8.

Лемма 6.9. Существуют такие $\alpha_2, \gamma_2 > 0$, что

$$f_{\bar{p}_1}^-(n) \geq \exp\{\alpha_2 \cdot n^{\gamma_2}\}. \quad (6.30)$$

Доказательство. Пусть $\bar{p} = \lim_{i \rightarrow \infty} p_i$, как и в лемме 6.8, и $\bar{p}_1 > \bar{p}$. Тогда неравенство (6.22) можно переписать

$$f_{\bar{p}_1}^-(n) \geq f_{\bar{p}}^-(n) \exp \left\{ \alpha \int_{\bar{p}}^1 \mathbf{E}_{p(t)} \{N(D_n(v))/D_n(v)\} dt \right\}. \quad (6.31)$$

Оценим подынтегральную функцию в (6.31) при $p(t) \in (\bar{p}, \bar{p}_1)$

$$\mathbf{E}_{(t)} \{N(D_n(v))/D_n(v)\} > d \cdot k_n(p(t)) > d \cdot k_n(\bar{p}),$$

где $k_n(\bar{p})$ определено в (6.17). Из (6.17) также следует, что

$$k_n(\bar{p}) + 1 > f_{\bar{p}}^- \left[\frac{n}{k_n(\bar{p}) + 1} \right] > a_2 \left[\frac{n}{k_n(\bar{p}) + 1} \right]^{\gamma_1}. \quad (6.32)$$

Отсюда получаем, что для некоторого $\beta > 0$ $k_n(\bar{p}) > \beta \cdot n^{\gamma_1/(1+\gamma_1)}$. Таким образом,

$$f_{\bar{p}_1}^-(n) \geq f_{\bar{p}}^-(n) \exp\{\alpha \cdot d \cdot \beta \cdot n^{\gamma_1/(1+\gamma_1)}\}.$$

По логичив $\gamma_2 = \gamma_1 / (\gamma_1 + 1)$, $\alpha_2 = \alpha \cdot d \cdot \beta$, завершаем доказательство леммы 6.9.

Проведя аналогичные выкладки, как и в лемме 6.9, но уже используя неравенство (6.30), вместо неравенства (6.27), доказываем следующую лемму.

Лемма 6.10. Существует такое $\alpha_3 > 0$, что

$$f_{p_1}^-(n) \geq \exp\{\alpha_3 n / \ln n\}, \quad (6.33)$$

или, что то же самое,

$$P_{p_1}(D_n(v)) \leq \exp\{-\alpha_3 n / \ln n\}. \quad (6.34)$$

Теорема 6.1 доказана.

Прямое доказательство теоремы 6.2 мы опускаем. Оно будет следовать из теоремы 6.3, так как известно (см., например, [45]), что если $p < p_T$, то для распределения «хвостов» размера кластера существуют экспоненциальные оценки.

Доказательство теоремы 6.3. Из условия III следует, что можно указать такое $\gamma_2 \in (0, 1)$ и такое N_1 , что при всех $n > N_1$ $|R_n(v)| < \exp\{n^{\gamma_2}\}$ для любого $v \in V$. Очевидна следующая цепочка неравенств

$$P_p(D_n(v)) \geq P_p(|W(v)| > |R_n(v)|) \geq P_p(|W(v)| > \exp\{n^{\gamma_2}\}). \quad (6.35)$$

Таким образом,

$$P_p(|W(v)| > l) \leq P(D_{[(\ln l)^{1/\gamma_2}]}(v)).$$

По теореме 6.1 для любого $p < p_H$

$$P_p(|W(v)| > l) \leq P_p(D_{[(\ln l)^{1/\gamma_2}]}(v)) < < \exp\{-\alpha (\ln l)^{1/\gamma_2} / (1/\gamma_2) \ln(\ln l)\} = \exp\{-\alpha \gamma_2 (\ln l)^{1/\gamma_2} / \ln(\ln l)\}. \quad (6.36)$$

Из этого неравенства следует для $p < p_H$ существование математического ожидания

$$E_p\{|W(v)|\} = \sum_{l=1}^{\infty} l \cdot P\{|W(v)| = l\} < \infty, \quad (6.37)$$

что и доказывает соотношение $p_T = p_H$.

Замечание 6.1. Условие III для рассматриваемых графов, введенное в начале параграфа, можно ослабить. Например, потребовать, чтобы $|R_n(v)| < \exp\{\beta n / \ln n\}$, для некоторого $\beta > 0$. Однако совсем избавиться от условия III пока не удастся.

Замечание 6.2. Основное неравенство (6.1) (теорема 6.1) также можно усилить, но доказательство чистого экспоненциального убывания для $P_p\{D_n(v)\}$ получить не удалось.

Замечание 6.3. Условия I и II в теореме 6.3 являются существенными. Так, в [56] приведен пример не удовлетворяющего этим условиям графа, для которого $p_T = 1/2$, а $p_H = 1$.

Теорема 6.3, доказанная нами для однопараметрического случая, обобщается на многопараметрический. Пусть H и T — множества, введенные в § 1.

Теорема 6.4. Пусть граф G удовлетворяет условиям I, II, III, тогда

$$[H] = [T], \quad (6.38)$$

где $[\cdot]$ — замыкание множества.

Доказательство теоремы 6.4 мы опускаем. Идейно оно повторяет доказательство теоремы 6.1 и 6.3.

§ 7. Другие перколяционные характеристики

Кроме критического значения вероятности $p = p_H = p_T = p_{S^*}$ во многих работах активно исследуются структура бесконечного кластера, а также другие перколяционные характеристики, описывающие распределение размеров конечного кластера и поведение функции плотности бесконечного кластера $\theta(p) = P_p\{|W| = \infty\}$.

Харрис [42] доказал, что для квадратной решетки при $p > p_H$ почти наверное (п. н.) существует только один бесконечный кластер; это доказательство распространяется на любой мозаичный граф, у которого существует дуальный граф. Ньюман и Шульман [47, 48] показали, что число бесконечных кластеров для периодических решеток в R^d при $p > p_H$ п. н. равняется единице или бесконечности. Они же исследовали плотностные свойства бесконечных кластеров в случае, когда реализуется бесконечное число таких кластеров. Имеются эвристические аргументы в пользу того, что в высоких размерностях ($d \geq 6$) вероятность реализации бесконечного числа бесконечных кластеров положительна.

В [34] доказано, что разность между функцией $\theta(p)$ в точке p и левым ее пределом в этой точке равна вероятности того, что фиксированный узел принадлежит бесконечному кластеру, причем сам этот кластер (как подграф рассматриваемого графа) имеет критическую вероятность, равную единице. Отсюда вытекает, что если при $p > p_H$ вероятность реализации бесконечного числа бесконечных кластеров равна нулю, то функция $\theta(p)$ непрерывна.

Кестен [45] доказал, что если граф, вложенный как решетка в R^2 , удовлетворяет некоторому условию симметрии, является мозаичным и имеет дуальный граф, то функция $\theta(p)$ бесконечно дифференцируема при $p > p_H$.

Важнейшими характеристиками поведения функций $\theta(p)$ и $E_p\{|W| \mid |W| < \infty\}$ вблизи точки $p = p_T = p_H$ являются критические индексы β , γ , γ' , задаваемые соотношениями

$$\theta(p) = P_p\{|W| = \infty\} \sim C(p - p_H)^\beta \text{ при } p \searrow p_H.$$

$$E_p\{|W|\} \sim C_-(p_H - p)^{-\gamma} \text{ при } p \nearrow p_H,$$

$$E_p\{|W| \mid |W| < \infty\} \sim C_+(p - p_H)^{-\gamma'} \text{ при } p \searrow p_H;$$

или, что более точно,

$$\beta = \lim_{p \searrow p_H} \frac{\ln \theta(p)}{\ln(p - p_H)},$$

$$\gamma = \lim_{p \nearrow p_H} \frac{\ln E_p\{|W|\}}{\ln(p_H - p)},$$

$$\gamma' = \lim_{p \searrow p_H} \frac{\ln E_p\{|W| \mid |W| < \infty\}}{\ln(p - p_H)}$$

(отметим, что даже существование пределов отнюдь не является доказанным).

Кестен [45] для квадратной решетки, а также для задачи связей на квадратной решетке доказал наличие таких констант $c_1, c_2, c_3, c_4, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$, что

$$c_1(p - p_H)^{\beta_1} \leq \theta(p) \leq c_2(p - p_H)^{\beta_2} \text{ при } p > p_H,$$

$$c_3|p - p_H|^{-\gamma_1} \leq E_p\{|W| \mid |W| < \infty\} \leq c_4|p - p_H|^{-\gamma_2} \text{ при } p \neq p_H.$$

Другие оценки критических индексов см. в [30, 38, 39].

§ 8. Непрерывные модели перколяции

Зададимся некоторым семейством множеств $\mathcal{D} = \{D(\alpha)\}_{\alpha \in A}$, где A — некоторое пространство параметров с вероятностной мерой μ на стандартной борелевской σ -алгебре $\sigma(A)$. Относительно всех элементов $D(\alpha)$ предположим выполнение следующих условий: 1) $D(\alpha)$ — компакт в евклидовом пространстве \mathbb{R}^d ; 2) $D(\alpha)$ звездчато относительно нуля, т. е. $\forall x \in D(\alpha)$, сегмент $[0, x]$ также принадлежит $D(\alpha)$. Элементы \mathcal{D} мы будем называть дефектами. Из определения следует, что все множества $D(\alpha)$ суть связные. Через $D(x, \alpha)$ обозначим дефект, полученный параллельным переносом $D(\alpha)$ на вектор $x \in \mathbb{R}^d$; при этом x будем называть центром дефекта $D(x, \alpha)$.

Рассмотрим в \mathbb{R}^d множество точек, образующим пуассоновское поле интенсивности λ . Каждой такой точке x независимо от других припишем дефект $D(x, \alpha)$ с центром в этой точке. Параметр α определяется вероятностным распределением на A , так что μ -вероятность иметь в фиксированной точке x_0 пуассоновского поля дефект $D(x_0, \alpha)$, где $\alpha \in B \in \sigma(A)$, равна $\mu(B)$.

Простейшим примером непрерывной задачи является задача шаров. Дефектами здесь являются шары фиксированного радиуса, центры которых образуют в \mathbb{R}^d пуассоновское поле. Пространство A в этом случае тривиально. Другим примером является

задача шаров случайного радиуса: радиус распределен с плотностью $\rho(r)$, так что $\int_0^{\infty} \rho(r) dr = 1$. Здесь $A = [0, \infty)$, а вероятностная мера задается обобщенной функцией $\rho(r)$. Еще один пример — задача со случайной ориентацией дефектов. Дефекты — конгруэнтные между собой фигуры. Помимо центра, свяжем с дефектом единичный вектор \vec{n} — направление. Рассматривается задача, в которой центры образуют пуассоновский ансамбль в \mathbb{R}^d , а направления распределены с плотностью $\Phi(\vec{n})$, где Φ — обобщенная функция на сфере S^{d-1} и $\int_{S^{d-1}} \Phi(\vec{n}) d\vec{n} = 1$.

Назовем путем S множество дефектов $\{D_0, D_1, \dots\}$, удовлетворяющее условию $D_i \cap D_{i+1} \neq \emptyset$, $i = 0, 1, 2, \dots$. Два дефекта D' и D'' называются связанными, если существует конечный путь $\{D_0, D_1, \dots, D_k\}$ такой, что $D_0 = D'$ и $D_k = D''$. Максимальное по включению множество связанных дефектов называется кластером. Максимальность понимается в том смысле, что все дефекты, связанные хотя бы с одним дефектом из этого множества, также принадлежат этому множеству. Мощностью $|W|$ кластера W называется количество входящих в него дефектов. Кластер называется бесконечным, если $|W| = \infty$.

Разобьем \mathbb{R}^d на равные кубы K_ξ с ребром длины ξ , $\theta_\xi(\lambda)$ — вероятность того, что существует точка $x \in K_\xi$, принадлежащая бесконечному кластеру. Из однородности следует, что $\theta_\xi(\lambda)$ не зависит от положения K_ξ в \mathbb{R}^d . Пусть $\lambda_H = \sup \{\lambda \mid \theta_\xi(\lambda) = 0\}$. Тогда, поскольку число кубов счетно, то при $\lambda < \lambda_H$ бесконечного кластера п. н. нет, и при $\lambda > \lambda_H$ бесконечный кластер п. н. существует. При этом говорят, что имеет место протекание или перколяция. Заметим, что $\theta_\xi(\lambda) = 0$ влечет $\theta_\eta(\lambda) = 0$ для всех $\eta \leq \xi$. Поскольку любой куб K_ζ для $\zeta > \xi$ содержится в объединении конечного числа кубов K_ξ , то $\theta_\xi(\lambda) = 0$ влечет и $\theta_\zeta(\lambda) = 0$ для всех $\zeta > \xi$. Следовательно, определение λ_H от ξ не зависит. В частности,

$$\lambda_H = \sup \{\lambda \mid \theta(\lambda, x) = 0\},$$

где $\theta(\lambda, x)$ — вероятность того, что фиксированная точка $x \in \mathbb{R}^d$ принадлежит бесконечному кластеру. Примем последнее равенство за определение λ_H .

Назовем пересечением параллелепипеда $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_d, b_d]$ в i -м направлении событие, при котором существует путь $\{D_1(x_1), \dots, D_n(x_n)\}$ такой, что $[x_i]_i \leq a_i$, $[x_n]_i \geq b_i$ и $\bigcup_{j=1}^n D_j(x_j)$ содержится в полосе $[a_1, b_1] \times \dots \times [a_{i-1}, b_{i-1}] \times \mathbb{R} \times [a_{i+1}, b_{i+1}] \times \dots \times [a_d, b_d]$ ($[x]_i$ обозначает i -ю компоненту вектора $x \in \mathbb{R}^d$).

Введем также следующие величины:

$$\lambda_T = \sup \{ \lambda \mid E_\lambda \{ |W(x)| \} < \infty \},$$

где $|W(x)|$ — мощность кластера W , содержащего точку x , и

$$\lambda_S = \sup \{ \lambda \mid \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(n, \lambda, i) = 0, 1 \leq i \leq d \},$$

где $\sigma(n, \lambda, i)$ — вероятность пересечения в i -м направлении параллелепипеда $[0, 3n] \times [0, 3n] \times \dots \times [0, n] \times \dots \times [0, 3n]$ (множитель $[0, n]$ соответствует i -му координатному вектору).

Пусть $L(\vec{r})$ — μ -вероятность того, что точка, сдвинутая от центра дефекта на вектор \vec{r} , накрывается этим дефектом. $V = \int L(\vec{r}) d\vec{r}$ — средний объем дефекта. Пуассоновская вероятность отсутствия центра дефекта в элементарном объеме $d\vec{r}$ равна $\exp\{-\lambda d\vec{r}\}$. Поэтому вероятность точки \vec{s} не быть накрытой дефектом с центром в $d\vec{r}$ вблизи точки \vec{r} равна $\exp\{-L(\vec{s}-\vec{r}) \lambda d\vec{r}\}$. Вероятность того, что точка \vec{s} не будет накрыта ни одним дефектом, следовательно, равна

$$\exp\left\{ \int -L(\vec{s}-\vec{r}) \lambda d\vec{r} \right\} = \exp\left\{ -\lambda \int L(\vec{r}) d\vec{r} \right\} = \exp\{-\lambda V\}.$$

Таким образом, критические величины могут быть описаны также в терминах объемной концентрации дефектов $C = 1 - \exp\{-\lambda V\}$.

8.1. Теорема о критических точках. В этом разделе будет доказано, что для весьма широкого класса моделей критические концентрации $\lambda_T, \lambda_S, \lambda_H$ совпадают. При доказательстве мы будем использовать аналогичное равенство ($p_T = p_S = p_H$) для периодических решеток в \mathbb{R}^d , полученное выше в § 6.

Мы приведем вначале доказательство для простейшей непрерывной модели — задачи шаров равного радиуса, а затем поясним, как оно обобщается на более сложные случаи.

Теорема 8.1. Для задачи конгруэнтных шаров в \mathbb{R}^d справедливо соотношение $\lambda_T = \lambda_S = \lambda_H$.

Доказательство. Обозначим через $\lambda_H(l), \lambda_T(l), \lambda_S(l)$ критические значения плотности пуассоновского поля для задачи шаров диаметра l . Обозначим также $\lambda_H = \lambda_H(1), \lambda_T = \lambda_T(1), \lambda_S = \lambda_S(1)$. Легко видеть, что $\lambda_H(l) = \lambda_H l^{-d}, \lambda_T(l) = \lambda_T l^{-d}, \lambda_S(l) = \lambda_S l^{-d}$. Поэтому достаточно рассмотреть случай $l = 1$.

Идея доказательства будет состоять в том, чтобы представить непрерывную задачу протекания как предел дискретных, для которых аналогичное равенство выполнено. Для этого свяжем с ансамблем центров дефектов, распределенных в \mathbb{R}^d по закону Пуассона с параметром λ , распределение дефектных узлов в некоторой дискретной перколяционной задаче. Рассмотрим в \mathbb{R}^d граф G_n

с множеством вершин $V_n = \{(k_1/n, k_2/n, \dots, k_d/n) \mid k_i \in \mathbb{Z}, i = 1, \dots, d\}$. Пусть $x_0 = (k_1/n, \dots, k_d/n)$. Обозначим через $\Omega_n(x_0)$ множество $[(k_1 - 1/2)/n, (k_1 + 1/2)/n) \times \dots \times [(k_d - 1/2)/n, (k_d + 1/2)/n)$. Две вершины x_0 и y_0 графа G_n соединены ребром, если $\inf_{\substack{x \in \Omega_n(x_0) \\ y \in \Omega_n(y_0)}} \|x - y\| \leq 1$, где $\|\cdot\|$ — евклидова норма в \mathbb{R}^d .

Определим на G_n перколяционную задачу следующим образом: вершина $x_0 \in V_n$ дефектна, если хотя бы один центр дефекта непрерывной задачи содержится в $\Omega_n(x_0)$. Тем самым каждая вершина дефектна с вероятностью $p = 1 - \exp\{-\lambda/n^d\} = f_n(\lambda)$ и недефектна с вероятностью $1 - p$, причем для различных вершин x_0 и y_0 эти события независимы, так как $\Omega_n(x_0) \cap \Omega_n(y_0) = \emptyset$. Каждому дефекту $D(x)$ с центром в точке x соответствует, таким образом, некоторая дефектная вершина $x_0 \in V_n$ такая, что $x \in \Omega_n(x_0)$. Такая вершина всегда существует и единственна. Тем самым определено отображение π центров дефектов непрерывной задачи на множество дефектных вершин графа G_n .

Рассмотрим два пересекающихся дефекта с центрами в точках x и y . Тогда $\|x - y\| \leq 1$, и поэтому соответствующие им дефектные вершины графа либо совпадают, либо соединены ребром по построению G_n . Таким образом, каждому кластеру $W^{(c)}$ в непрерывной задаче соответствует кластер $W^{(d)}$ в дискретной (будем называть их для краткости c -кластерами и d -кластерами). Поскольку в любом конечном объеме п. н. содержится конечное число центров дефектов, то для каждой реализации пуассоновского поля бесконечному кластеру в непрерывной задаче отвечает бесконечный кластер на G_n . Следовательно, протекание в непрерывной задаче влечет и протекание на G_n . Поэтому для любых n выполнено неравенство $p_H(G_n) \leq f_n(\lambda_H)$. Поскольку $f_n(\lambda)$ возрастающая, то существует обратная функция $f_n^{-1}(p)$ и $\lambda_H \geq f_n^{-1}(p_H(G_n))$.

Докажем, что подобное неравенство выполнено и для λ_T . Нами было определено отображение π центров дефектов на множество дефектных вершин графа G_n . Рассмотрим полный прообраз $\pi^{-1}(W^{(d)})$ для каждого кластера $W^{(d)}$ на G_n . Все дефекты непрерывной задачи распадаются на непересекающиеся классы, причем по построению G_n никакой c -кластер не принадлежит более чем одному классу. Тем самым множество c -кластеров также распалось на непересекающиеся классы. Обозначим через $\Gamma(W^{(c)})$ такой класс, содержащий кластер $W^{(c)}$. По определению $|\Gamma| = \sum_{w^{(c)} \in \Gamma} |W^{(c)}|$. Таким образом, имеем всегда $|W^{(c)}| \leq |\Gamma(W^{(c)})|$.

Значит, $E\{|W^{(c)}|\} \leq E\{|\Gamma(W^{(c)})|\}$. Пусть $D(k, l) = D(k, l, x_0, G_n)$ — множество связанных на G_n подмножеств $W \subseteq V_n$, содержащих вершину x_0 и таких, что $|W| = k$, $|\partial W| = l$. Пусть элементы

множества $D(k, l)$ суть $W_1(k, l), W_2(k, l), \dots, W_{d(k, l)}(k, l)$, где $d(k, l) = |D(k, l)|$. Рассмотрим d -кластер $W^{(d)}$, содержащий вершину x_0 , и обозначим через $\Gamma = \pi^{-1}(W^{(d)})$ его полный прообраз. Пусть $A_i(k, l)$ — событие, состоящее в том, что $W^{(d)} = W_i(k, l)$. Все такие события несовместны, и

$$\bigcup_{k, l} \bigcup_{i=1}^{d(k, l)} A_i(k, l) = I,$$

где I — событие вероятности 1. Тогда по формуле полного математического ожидания

$$\begin{aligned} E\{|\Gamma|\} &= \sum_{k, l=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{d(k, l)} E\{|\Gamma| / A_i(k, l)\} \cdot P\{A_i(k, l)\} = \\ &= \sum_{k, l} \sum_{i=1}^{d(k, l)} E\left\{\sum_{j=1}^k \xi_j / \forall j: \xi_j > 0\right\} \cdot P\{W_i(k, l)\}, \end{aligned}$$

где ξ_j — полный прообраз j -й вершины d -кластера $W_i(k, l)$. Заметим, что ξ_j — независимые одинаково распределенные пуассоновские случайные величины, откуда

$$\begin{aligned} E\{\xi_1 + \dots + \xi_k / \xi_1 > 0, \dots, \xi_k > 0\} &= kE\{\xi_1 / \xi_1 > 0\} = \\ &= k \frac{E\xi_1}{P\{\xi_1 > 0\}} = kv, \end{aligned}$$

где $v = \frac{\lambda}{n^d} \left(1 - \frac{\lambda}{n^d}\right)^{-1}$. Тогда

$$\begin{aligned} E\{|\Gamma|\} &= \sum_{k, l} \sum_{i=1}^{d(k, l)} kvP\{W_i(k, l)\} = \\ &= \sum_{k, l} kvd(k, l) (f_n(\lambda))^k (1 - f_n(\lambda))^l = vE\{|W^{(d)}|\}. \end{aligned}$$

Таким образом, $E\{|W^{(c)}|\} \leq vE\{|W^{(d)}|\}$. Тогда $\lambda_T \geq f_n^{-1}(p_T(G_n))$ для всех n .

Аналогично легко убедиться в том, что если есть протекание в 1-м направлении параллелепипеда B_ξ в непрерывной задаче, то есть протекание в 1-м направлении по G_n параллелепипеда $[1/2n, \xi - 1/2n] \times [1/2n, 3\xi - 1/2n - 1] \times \dots \times [1/2n, 3\xi - 1/2n - 1]$, а значит, и параллелепипеда $[1/2n, \xi - 1/2n] \times [1/2n, 3(\xi - 1/2n)] \times \dots \times [1/2n, 3(\xi - 1/2n)]$. Тогда поскольку все направления равнозначны, $p_S(G_n) = \sup\{p | \lim_{\xi \rightarrow \infty} P_p \{\text{есть протекание } B_\xi \text{ по } G_n\} = 0\} = \sup\{p | \lim_{\xi \rightarrow \infty} P_p \{\text{есть протекание } B_{\xi-1/n} \text{ по } G_n\} = 0\} \leq f_n(\lambda_S)$. Стало быть, для всех n имеем $\lambda_S \geq f_n^{-1}(p_S(G_n))$. Положим

$$1 \leq l_n = \sup\{\|x - y\| | x \in \Omega_n(x_0), y \in \Omega_n(y_0), x_0 G_n y_0\} \leq 1 + 2\sqrt{d/n},$$

где d — размерность пространства, и опишем вокруг центров дефектов исходной задачи шары диаметра l_n . Мы получили, таким образом, реализацию непрерывной задачи с дефектами $\tilde{D}(x)$ — шарами диаметра l_n . Заметим, что если имеется кластер $W^{(d)}$ на G_n , то соответствующее ему множество дефектов

$\bigcup_{x \in \pi^{-1}(W^{(d)})} \tilde{D}(x)$ также составляет кластер $\tilde{W}^{(c)}$ по выбору l_n ,

причем $|\tilde{W}^{(c)}| \geq |W^{(d)}|$. Отсюда аналогичными рассуждениями легко показать, что $\lambda_n(l_n) \leq f_n^{-1}(p_H(G_n))$, $\lambda_T(l_n) \leq f_n^{-1}(p_T(G_n))$, $\lambda_S(l_n) \leq f_n^{-1}(p_S(G_n))$ для всех n .

Таким образом, для каждой критической точки имеем цепочку неравенств: $\lambda_H \geq f_n^{-1}(p_H(G_n)) \geq \lambda_H(l_n) = \lambda_H l_n^{-d}$; $\lambda_T \geq f_n^{-1}(p_T(G_n)) \geq \lambda_T(l_n) = \lambda_T l_n^{-d}$; $\lambda_S \geq f_n^{-1}(p_S(G_n)) \geq \lambda_S(l_n) = \lambda_S l_n^{-d}$.

Поскольку $\lim_{n \rightarrow \infty} l_n = 1$, то существуют пределы $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n^{-1}(p_H(G_n)) = \lambda_H$; $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n^{-1}(p_T(G_n)) = \lambda_T$; $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n^{-1}(p_S(G_n)) = \lambda_S$. Так как для всех графов G_n имеем (см. § 6) $p_T(G_n) = p_S(G_n) = p_H(G_n)$, то следовательно, для всех n выполнено $f_n^{-1}(p_T(G_n)) = f_n^{-1}(p_S(G_n)) = f_n^{-1}(p_H(G_n))$, откуда $\lambda_T = \lambda_S = \lambda_H$, что и требовалось доказать.

З а м е ч а н и е 8.2. Очевидно, соотношение $\lambda_T = \lambda_S = \lambda_H$ доказывается тем же способом для всех тех задач, в которых дефекты суть конгруэнтные одинаково ориентированные фигуры ненулевого d -мерного объема.

Перейдем к рассмотрению более общего случая, а именно случая, когда множество форм дефекта конечно.

Теорема 8.3. Для непрерывных задач с множеством дефектов $\{D_i\}_{i=1, \dots, m}$ выполнено соотношение $\lambda_T = \lambda_S = \lambda_H$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 8.1 с той разницей, что рассматриваются графы с m классами вершин; вершины i -го класса соответствуют дефектам D_i и имеют вероятность занятости p_i .

Для дальнейшего обобщения нам понадобится следующее определение.

Определение 8.4. Пусть в одном и том же пространстве R^d рассматриваются две непрерывные задачи: (Z_1) — с множеством дефектов $\{D_1(a_1)\}_{a_1 \in A_1}$ и (Z_2) — с множеством дефектов $\{D_2(a_2)\}_{a_2 \in A_2}$. В каждой задаче тип дефекта в фиксированной точке пуассоновского поля определяется вероятностной мерой μ_i на стандартной σ -алгебре $\sigma(A_i)$ подмножеств A_i , $i=1, 2$. Пусть на $\sigma(A_1)$ задан гомоморфизм $\Phi: \sigma(A_1) \rightarrow \sigma(A_2)$, т. е. отображение со свойствами: $\Phi(\Omega_1 \cup \Omega_2) = \Phi(\Omega_1) \cup \Phi(\Omega_2)$ и $\Phi(\Omega_1 \cap \Omega_2) = \Phi(\Omega_1) \cap \Phi(\Omega_2) \forall \Omega_1, \Omega_2 \in \sigma(A_1)$. Будем говорить, что задача (Z_2) мажорирует задачу (Z_1) (обозначение: $(Z_1) \leq (Z_2)$), если для любых $\Omega \in \sigma(A_1)$ имеет место $\mu_1(\Omega) \leq \mu_2(\Phi(\Omega))$ и $\bigcap_{a_1 \in \Omega} D_1(a_1) \subseteq \bigcup_{a_2 \in \Phi(\Omega)} D_2(a_2)$.

Замечание 8.5. Пусть задача (Z_2) мажорирует задачу (Z_1) в смысле определения 8.4. Тогда $\lambda_{\text{сг}}^{(1)} \geq \lambda_{\text{сг}}^{(2)}$, где $\lambda_{\text{сг}}^{(i)}$ — одна из критических плотностей $\lambda_H, \lambda_T, \lambda_S$ для задачи (Z_i) , $i = 1, 2$.

Определение 8.6. Рассмотрим в \mathbb{R}^d непрерывную задачу (Z) с множеством дефектов $\{D(a)\}_{a \in A}$, где A произвольно. Назовем эту задачу аппроксимируемой, если существуют последовательности задач $(Z_n) : \{D'_n(a)\}_{a \in A_n}$ и $(Z_n^*) : \{D_n^*(a)\}_{a \in A_n}$ такие, что для всех n выполнено:

- 1) A_n конечны;
- 2) при любом $a \in A_n$ дефект $D_n^*(a)$ получен из $D'_n(a)$ гомотетией $\Gamma_{k(n)}$ с постоянным коэффициентом $k(n) \geq 1$;
- 3) $(Z_n) \leq (Z) \leq (Z_n^*)$ в смысле определения 8.4;
- 4) существует $\lim_{n \rightarrow \infty} k(n) = 1$.

Как можно убедиться, очень многие непрерывные задачи являются аппроксимируемыми. Это, например, задачи с непрерывной случайной ориентацией, задача шаров ограниченного случайного радиуса и др. Поэтому итоговая теорема раздела имеет довольно большую общность.

Теорема 8.7. Для аппроксимируемых в смысле определения 8.6 непрерывных задач имеет место соотношение $\lambda_T = \lambda_S = \lambda_H$.

Подробное доказательство теорем 8.3 и 8.7 см. в [8].

8.2. Методы оценок критической концентрации. Метод поколений. В § 3 был описан метод поколений для дискретных перколяционных задач. Здесь мы перенесем его на непрерывные модели.

Рассмотрим в \mathbb{R}^d непрерывную задачу протекания, где форма дефекта фиксирована и лишь ориентация может быть случайной. Пусть \vec{n} — вектор направления дефекта. Ориентация дефекта при фиксированном центре определяется вероятностной мерой μ на сфере S^{d-1} . Ограничимся пока такими мерами, что для двух независимых случайных векторов \vec{n}_1 и \vec{n}_2 , подчиненных распределению на S^{d-1} , разность $\vec{n}_2 - \vec{n}_1$ не зависит от \vec{n}_1 . Такие меры мы будем называть симметричными. В частности, равномерное распределение ориентации является симметричным. Фиксированная (неслучайная) ориентация также удовлетворяет определению симметричного распределения.

Назовем дефекты соседними, если они пересекаются. Если распределение ориентации симметрично, то легко видеть, что для любого дефекта математическое ожидание числа его соседей одно и то же и равно λB , где λ — интенсивность пуассоновского поля центров дефектов, B — константа для данной задачи.

Выделим некоторый дефект и назовем его дефектом поколения 0. Если мы уже определили дефекты поколения $0, 1, \dots, k-1$, то назовем дефектами поколения k те дефекты, которые соседствуют с дефектами поколениями $k-1$ и не являются дефектами поколений $0, 1, \dots, k-1$. Рассмотрим случайные величины $\xi_k(\lambda)$ — число дефектов k -го поколения. Ясно, что $\xi(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k(\lambda)$ — не что иное, как мощность кластера, содержащего выделенный дефект, а $E\xi(\lambda) = \lambda B$. Поскольку дефекты $(k+1)$ -го поколения являются соседями дефектов k -го поколения, то для условного математического ожидания почти наверное справедлива оценка

$$E(\xi_{k+1}(\lambda)/\xi_k(\lambda)) \leq \lambda B \xi_k(\lambda). \quad (8.1)$$

Отсюда вытекает, что $E\xi_k(\lambda) \leq (\lambda B)^k$ при всех k . Следовательно, если $\lambda < 1/B$, то $E\xi(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} E\xi_k(\lambda) \leq \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda B)^k = 1/(1-\lambda B) < \infty$. Согласно определению λ_T , это означает, что

$$\lambda_T \geq 1/B. \quad (8.2)$$

Можно попытаться улучшить этот результат, получив оценку вида $E(\xi_{k+l}(\lambda)/\xi_k(\lambda)) \leq \gamma(\lambda) \xi_k(\lambda)$ для всех $k \geq N$. Тогда, как только $\gamma < 1$, имеем $E\xi < \infty$, и, следовательно, протекания нет.

Этот метод является общим для всех задач протекания и позволяет получать хорошие нижние оценки даже в тех задачах, для которых единственным пока методом остается метод Монте-Карло. В непрерывных моделях, правда, получение оценок вида $E(\xi_{k+l}/\xi_k) \leq \gamma \xi_k$ при $l \geq 2$ связано со значительными техническими трудностями. При $l=1$ оценки (8.1) и (8.2) можно несколько улучшить.

Пример 8.8. Рассмотрим в \mathbb{R}^3 задачу шаров диаметра 1. Здесь объем дефекта $V = \pi/6$, а $B = 4/3 \pi$. Пусть дефект с центром в точке \vec{r}_k принадлежит k -му поколению ($k \geq 1$). Тогда существует дефект $(k-1)$ -го поколения с центром в некоторой точке \vec{r}_{k-1} , для которой $|\vec{r}_k - \vec{r}_{k-1}| \leq 1$. Центры дефектов $(k+1)$ -го поколения должны находиться в области точек \vec{r} , задаваемой неравенствами $|\vec{r} - \vec{r}_k| \leq 1$, $|\vec{r} - \vec{r}_{k-1}| > 1$. Объем этой области в \mathbb{R}^3 не превышает $11/12 \pi$. Поэтому для данной задачи $E(\xi_{k+1}(\lambda)/\xi_k(\lambda)) \leq < 11/12 \pi \lambda \xi_k(\lambda) = 11/16 \lambda B \xi_k(\lambda)$ и

$$\lambda_T \geq \frac{16}{11} \cdot \frac{1}{B}. \quad (8.3)$$

Дальнейшее усиление оценок связано с усложнением метода.

Спектральный метод. Этот метод более общий, чем метод поколений. С его помощью можно получать более точные нижние оценки. Важно также, что он применим ко всем непрерывным моделям.

Напомним, что мы снабжали дефекты параметром a , который указывал на тип дефекта. Областью изменения параметра было пространство A с вероятностной мерой. Вместо случайной величины ξ_k (индекс λ мы будем в дальнейшем опускать) рассмотрим случайную величину $\eta_k(a) = \xi_k \cdot \theta_k(a)$, где $\theta_k(a)$ есть плотность (доля) дефектов k -го поколения, отмеченных параметром a . Пусть $\mathcal{L}_1(A)$ — пространство суммируемых функций на A с нормой $\|f\| = \int_A |f(a)| \nu(da)$. В большинстве задач в качестве A мы будем выбирать интервал на числовой прямой, а в качестве ν — меру Лебега. В некоторых случаях A будет конечным множеством, а ν — считающей мерой. Заметим, что $\xi_k = \|\eta_k\|$.

Ищется оценка $E\eta_1(a) \leq \lambda g(a)$, где $g(a)$ не зависит от λ и строится интегральный оператор $\Omega: \mathcal{L}_1(A) \rightarrow \mathcal{L}_1(A)$ с неотрицательным ядром ω , удовлетворяющий при любых k и a условию

$$E(\eta_{k+1}(a) | \eta_k) \leq \Omega \lambda [\eta_k](a) = \lambda \int_A \omega(a, b) \eta_k(b) \nu(db). \quad (8.4)$$

Тогда для всякого k справедлива оценка $E\eta_k(a) \leq \lambda^k \Omega^{k-1}[g](a)$, и, следовательно, $E\xi_k = E|\eta_k| \leq \lambda^k \|\Omega^{k-1}[g]\|$. Обозначим через σ спектральный радиус оператора Ω . Тогда если $\lambda\sigma < 1$, то $E\xi(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} E\xi_k(\lambda) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \|\Omega^{k-1}[g]\| < \infty$. Поэтому

$$\lambda_T \geq 1/\sigma. \quad (8.5)$$

Отметим, что для интегрального оператора с неотрицательным ядром спектральный радиус совпадает с наибольшим собственным значением (см., например, [10]).

Пример 8.9. Снова рассмотрим задачу шаров диаметра 1. Выберем в качестве параметра a расстояние от центра данного дефекта до ближайшего центра дефекта предшествующего поколения. Тогда A есть интервал $(0, 1]$. Пусть дефект с центром в точке \vec{r}_k принадлежит k -му поколению, а ближайший к нему дефект $(k-1)$ -го поколения имеет центр в точке \vec{r}_{k-1} , где $|\vec{r}_k - \vec{r}_{k-1}| = b$. Тогда центры дефектов $(k+1)$ -го поколения, удаленные от \vec{r}_k на расстояние a , должны располагаться на поверхности, заданной условиями $|\vec{r}_k - \vec{r}| = a$, $|\vec{r} - \vec{r}_{k-1}| > 1$. Эта поверхность в \mathbb{R}^3 имеет площадь $\pi \frac{a}{b} ((a+b)^2 - 1)$. Поэтому

$$E(\eta_{k+1}(a) | \eta_k) \leq \lambda \Omega[\eta_k](a) = \lambda \int_{1-a}^1 \pi \frac{a}{b} ((a+b)^2 - 1) \eta_k(b) db.$$

В данном случае спектральный радиус оператора Ω оказывается равен $4\pi/3\sqrt{3} = B/\sqrt{3}$. Таким образом, $\lambda_T \geq \sqrt{3}/B$ (ср. с (8.2)). Поскольку здесь $V = B/8$, то $\lambda_T V \geq \sqrt{3}/8$ и $C_T = 1 - \exp\{-\lambda_T V\} \geq 1 - \exp\{-\sqrt{3}/8\} \approx 0,19467$.

Покажем, каким образом можно строить оператор Ω в более общем случае, когда дефекты могут иметь различную форму или распределение ориентации не является симметричным. Пусть имеется конечное число типов дефектов: a_1, \dots, a_n и p_i — вероятность реализации i -го типа. Обозначим через $h(a_i, a_j)$ объем области в \mathbf{R}^d , содержащей те векторы \vec{r} , для которых дефект типа a_i с центром в \vec{r} и дефект типа a_j с центром в $\vec{0}$ пересекаются. Пусть $\eta_k(a_i)$ — число дефектов типа a_i в k -м поколении. Тогда

$$E(\eta_{k+1}(a_i) | \eta_k(a_1), \dots, \eta_k(a_n)) \leq \lambda \sum_{j=1}^n p_j h(a_i, a_j) \eta_k(a_j).$$

Таким образом, в качестве оператора Ω может быть выбран матричный оператор, задаваемый матрицей с элементами $p_i h(a_i, a_j)$ ($i, j = 1, \dots, n$).

Пусть теперь тип дефекта задается параметром a , пробегающим интервал $(0, \infty)$, и $F(a)$ — функция распределения типа

дефекта. В этом случае $E(\eta_{k+1}(a) | \eta_k) \leq \lambda \int_0^\infty h(a, b) \eta_k(b) dF(b)$

и в качестве Ω выступает интегральный оператор.

Пример 8.10. Пусть каждый дефект имеет форму шара, радиус которого — случайная величина с плотностью $f(a)$. Тогда $h(a, b) = 4/3\pi(a+b)^3$. Оператор Ω с таким ядром переводит всякую функцию $g(b)$ в линейную комбинацию функций $a^3 f(a)$, $a^2 f(a)$, $a f(a)$ и $f(a)$. Поэтому для определения спектрального радиуса Ω достаточно рассмотреть в качестве области определения оператора четырехмерное пространство, порожденное этими функциями. Пусть

$$g(b) = \sum_{j=0}^3 c_j b^j f(b), \quad m_i = \int_0^\infty a^i f(a) da = \int_0^\infty a^i dF(a).$$

Тогда

$$\Omega[g](a) = \int_0^\infty \frac{4}{3} \pi (a+b)^3 f(a) g(b) db =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\infty} \frac{4}{3} \pi (a+b)^3 f(a) f(b) \sum_{j=0}^3 c_j b^j db = \\
&= \frac{4}{3} \pi f(a) \sum_{j=0}^3 c_j \int_0^{\infty} (a^3 b^j + 3a^2 b^{j+1} + 3ab^{j+2} + b^{j+3}) f(b) db = \\
&= \frac{4}{3} \pi f(a) \sum_{j=1}^3 c_j (a^3 m_j + 3a^2 m_{j+1} + 3am_{j+2} + m_{j+3}).
\end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что спектральный радиус оператора Ω совпадает со спектральным радиусом (наибольшим собственным значением) матрицы

$$4\pi \begin{pmatrix} m_3 & 3m_2 & 3m_1 & m_0 \\ m_4 & 3m_3 & 3m_2 & m_1 \\ m_5 & 3m_4 & 3m_3 & m_2 \\ m_6 & 3m_5 & 3m_4 & m_3 \end{pmatrix},$$

где $m_i = \int_0^{\infty} a^i dF(a)$ — i -й момент радиуса шара.

По непрерывности этот результат переносится и на случай разрывной функции распределения F . Действительно, если функция F разрывна, то существуют сходящиеся слабо к F последовательности функций распределения $\{F'_n\}$ и $\{F''_n\}$ такие, что для всех n имеет место $F'_n \leq F \leq F''_n$. Далее смотри замечание 8.5.

Дискретизация. Этим методом можно получать как верхние, так и нижние оценки критической концентрации. Основной идеей является сведение непрерывной модели к некоторой дискретной. Мы уже использовали выше этот метод при доказательстве теоремы 8.1. Ниже мы воспользуемся им при доказательстве теоремы 8.12.

8.3. О среднем числе связей в момент перколяции. Пусть все дефекты имеют одинаковую выпуклую форму D и симметричное распределение ориентации. Согласно неравенству (8.2), среднее число соседних дефектов λB при $\lambda = \lambda_H (= \lambda_T = \lambda_S)$ ограничено снизу единицей. Результаты численного моделирования на ЭВМ дают основание полагать, что эта величина ограничена и сверху.

Гипотеза 8.11. Существует константа c_d , зависящая только от размерности пространства d такая, что для любой задачи со случайной симметричной ориентацией справедлива оценка $1 \leq \lambda_H B \leq c_d$.

Реально следует ожидать, что $c_2 \leq 4,5$, $c_3 \leq 3$.

Можно высказать и более сильную гипотезу, что значение $\lambda_H B$ примерно одинаково для всех моделей перколяций в \mathbb{R}^d , где дефекты имеют форму выпуклой области, а распределение

их ориентации симметрично. Подтверждение этой гипотезы имело бы большое значение, так как величина B рассчитывается сравнительно легко, и, зная ее, можно было бы определять и критическую концентрацию.

Теорема 8.12. При $d=2$ утверждение гипотезы 8.11 справедливо.

Доказательство. Рассмотрим случай равномерной ориентации (полное доказательство для общего случая см. в [9]). Пусть диаметр области D , т. е. наибольший отрезок прямой, который она может покрыть, равен l . Тогда данная задача мажорирует задачу «игл» (отрезков) длины l с тем же распределением ориентации. Получим оценку сверху для λ_H в задаче игл; в силу замечаний 8.5 она будет являться и оценкой для λ_H в исходной задаче. Воспользуемся методом дискретизации. Наложим на плоскость квадратную сетку из прямых, параллельных осям координат с шагом $(\sqrt{3}-1)l/8$. Рассмотрим граф, вершинами которого являются центры квадратов сетки и каждая вершина соединена с восемью вершинами, соответствующими восьми соседним квадратам сетки (граф есть двухдиагональная квадратная решетка). Вершина считается дефектной, если в пределах соответствующего квадрата имеются центры двух «игл», одна из которых наклонена к оси абсцисс, а другая — к оси ординат на угол не более $\pi/6$. Тогда из наличия бесконечного кластера в дискретной задаче вытекает и наличие бесконечного кластера в непрерывной. Вероятность того, что вершина графа будет дефектной, оценивается снизу через

$$\left[1 - \exp\left\{-\frac{1}{3}\lambda \times \left(\frac{\sqrt{3}-1}{8}l\right)^3\right\}\right]^2.$$

Стало быть,

$$\left[1 - \exp\left\{-\frac{1}{3}\lambda_H \left(\frac{\sqrt{3}-1}{8}l\right)^2\right\}\right]^2 \leq p_H,$$

где p_H — критическая вероятность для двухдиагональной квадратной решетки ($p_H \approx 0,41$). Отсюда

$$\lambda_H \leq \frac{96(2 + \sqrt{3})}{l^2} \cdot \ln \frac{1}{1 - \sqrt{p_H}}. \quad (8.6)$$

С другой стороны, поскольку диаметр области D равен l , она накрывается кругом радиуса $\sqrt{3}l/3$. Поэтому

$$B \leq 4\pi \left(\frac{\sqrt{3}}{3}l\right)^2 = \frac{4}{3}\pi l^2 \quad (8.7)$$

и $\lambda_H B \leq 128(2 + \sqrt{3})\pi \ln\left(\frac{1}{1 - \sqrt{p_H}}\right)$, что и требовалось.

Теорема 8.13. Пусть плоская выпуклая фигура D имеет диаметр l , а ее проекция на прямую, перпендикулярную диамет-

ру, равна a . Тогда для задачи со случайной симметричной (не фиксированной) ориентацией справедливы оценки: $c'a/l \leq C_{cr} \leq \leq c''a/l$, где $C_{cr} = 1 - \exp\{-\lambda_H V\}$ — критическая объемная концентрация, а c' , c'' — абсолютные константы.

Доказательство. Согласно неравенству (8.6), $\lambda_H \leq c/l$. Очевидно, что площадь D не меньше, чем $1/2la$, поэтому $C_{cr} \leq 1 - \exp\left\{-\frac{c}{l^2} \frac{1}{2} la\right\} \leq \frac{1}{2} c \frac{a}{l}$. С другой стороны, согласно (8.7), $B \leq 4/3\pi l^2$. Из неравенства (8.2) вытекает, что $\lambda_T \geq 1/B \geq \geq 3(4\pi l^2)$. Площадь D не превосходит la . Так как $a/l \leq 1$, то $C_{cr} \geq 1 - \exp\left\{-\frac{3}{4\pi l^2} la\right\} = 1 - \exp\left\{-\frac{3}{4\pi} \frac{a}{l}\right\} > \left(1 - \exp\left\{-\frac{3}{4\pi}\right\}\right) \frac{a}{l}$, что и требовалось доказать.

Перейдем к случаю, когда размерность пространства равна 3. Если линейные размеры области D равны $l \times l \times a$ ($l \gg a$), то, используя тот же метод, можно доказать оценку, аналогичную (8.6):

$$\lambda_H \leq \frac{\tilde{c}_1}{l^3} \ln \frac{1}{1 - \sqrt[3]{q_H}}$$

где q_H — критическая вероятность для кубической решетки. Аналогично (8.7), имеет место оценка $B \leq \tilde{c}_2 l^3$ и, значит, $1 \leq \lambda_H B \leq \leq \tilde{c}_3$. Отсюда, аналогично теореме 8.13, вытекает, что $c'a/l \leq \leq C_{cr} \leq c''a/l$. Если же линейные размеры области D равны $l \times a \times a$ ($l \gg a$), то мы не можем получить приемлемой оценки сверху для λ_H . В этом случае можно показать, что $B \approx \tilde{c}_4 a l^2$. Если гипотеза 8.11 справедлива в размерности $d=3$, то отсюда следует, что $\lambda_H \approx \tilde{c}_5 \frac{1}{a l^2}$, $V \approx \tilde{c}_6 a^2 l$, $C_{cr} = 1 - \exp\{-\lambda_H V\} \approx c_7 a/l$.

8.4. О числе бесконечных кластеров. В [9] доказано, что в непрерывных перколяционных моделях (так же, как это имеет место в дискретных) число бесконечных кластеров при $\lambda > \lambda_H$ равняется единице или бесконечности.

§ 9. Просачивание случайных полей

а) Начнем с рассмотрения задач просачивания на решетках Z^v , $v \geq 2$, со стандартной связностью. Пусть $\xi(x)$, $x \in Z^v$, — однородное поле, h — некоторый уровень. Введем множества уровня

$$A_h^+ = \{x: \xi(x) \geq h\}, \quad A_h^- = \{x: \xi(x) < h\},$$

т. е. множества A_h^+ «всплесков» поля над уровнем h и оставшиеся множества A_h^- . В идеале нас интересуют топологические свойства множеств A_h^+ , A_h^- во всем интервале изменения h , но поскольку даже для бернуллиевского поля эта задача очень трудна, мы ограничимся результатами типа: найдется уровень h^+

такой, что при $h > h^+$ множество A_h^- протекает на ∞ , а множество A_h^+ распадается на конечные связные компоненты и аналогичными двойственными утверждениями, получающимися при замене «+» на «-» и неравенства $h > h^+$ на $h < h^-$. Даже эти простейшие результаты (особенно с точными оценками h^+ , h^-) полезны для многих приложений.

Следующий результат [19] доказывается дословным повторением контурных рассуждений из введения.

Теорема 9.1. Допустим, что найдется функция $g(h)$, $g(h) \searrow 0$ при $h \rightarrow +\infty$ и постоянная $c > 0$ такие, что для любых различных точек $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{Z}^v$, $n = 1, 2, \dots$

$$(PF) \mathbf{P}\{\xi(x_1) > h, \dots, \xi(x_n) > h\} \leq c \cdot g^n(n). \quad (9.1)$$

Тогда найдется постоянная $h^+ < \infty$ такая, что при $h > h^+$ п. н. множество A_h^+ не протекает, а A_h^- протекает на бесконечность. В качестве h^+ можно взять корень уравнения

$$g(h) = C^{-1}(v),$$

где $C(v)$ — комбинаторная константа из формулы (3) во введении.

Аналогичная теорема о просачивании A_h^+ и непросачивании A_h^- получится, если удастся установить оценку

$$(PF) \mathbf{P}\{\xi(x_1) < h, \dots, \xi(x_n) < h\} \leq C f^n(h), \quad (9.2)$$

$$f(h) \searrow 0 \text{ при } h \rightarrow -\infty.$$

(мы предполагаем для простоты, что одномерное распределение $\xi(\cdot)$ сосредоточено на всей оси \mathbb{R}^1).

Для симметрично распределенных полей, например гауссовских, оценка (9.2) получается из (9.1) при замене $\xi(x) \rightarrow -\xi(x)$. Проблема получения PF -неравенств типа (9.1) не вполне традиционна для теории однородных полей, так как здесь речь идет об оценках с экспоненциальной точностью. В частности, традиционные условия сильного перемешивания (по Розенблатту, по Ибрагимову и пр.) для этих целей не подходят.

Ситуацию можно грубо описать так. PF -оценка справедлива при очень слабых условиях на моменты $\xi(x)$, если очень быстро убывают корреляции. Ослабление корреляционных ограничений должно сопровождаться усилением моментных условий. Приведем два типичных результата [19]:

Теорема 9.2. Если поле $\xi(x)$ имеет конечный радиус корреляции, то справедлива PF -оценка.

Напомним, что R_0 называется радиусом корреляции для $\xi(x)$, если для любых множеств A_1, \dots, A_n : $\rho(A_i, A_j) > R_0$ независимы σ -алгебры $\mathcal{F}_{A_1}, \dots, \mathcal{F}_{A_n}$, порожденные значениями $\xi(\cdot)$ на этих множествах.

Теорема 9.3. Допустим, что $\xi(x) = \sum_{y \in \mathbb{Z}^v} C(x-y) \eta(y)$, где $\eta(y)$ — независимы, одинаково распределены и $|\langle \exp z\eta \rangle| < C$ при $|z| < \delta$ (условие Крамера), а $\sum_{y \in \mathbb{Z}^v} |C(y)| < \infty$. Тогда условие PF имеет место.

В теореме 9.2 отсутствовали моментные ограничения, но корреляции были финитны; в теореме 9.3, наоборот, корреляции (скажем бинарные) могут убывать лишь по степенному закону, зато требуется существование экспоненциальных моментов. Возможны и промежуточные результаты (см. [19]).

Остановимся на важном случае гауссовских полей.

Теорема 9.4. Если гауссовское однородное поле ξ имеет ограниченную спектральную плотность $f(\lambda)$, то оно класса PF (т. е. действует неравенство (9.1)). Самое короткое доказательство основано на теории тёплицевых форм [19]. Имеем

$$\begin{aligned} P\{\xi(x_1) > h, \dots, \xi(x_n) > h\} &= P\{\xi^2(x_1) > h^2, \dots, \xi^2(x_n) > h^2\} \leq \\ &\leq P\left\{\sum_{i=1}^n \xi^2(x_i) > nh^2\right\} \leq P\left\{\sum_{i=1}^n \lambda_i^{(n)} \zeta_i^2 > nh^2\right\} \leq \\ &\leq P\left\{\sum_{i=1}^n \zeta_i^2 > \frac{nh^2}{\Lambda}\right\} \leq \frac{\langle \exp\left\{\sum_{i=1}^n \zeta_i^2\right\} \rangle}{\exp\frac{znh^2}{\Lambda}} = \\ &= \exp\left\{-\frac{n}{2} \ln(1-4z) - \frac{znh^2}{\Lambda}\right\} \leq \exp\{-C(\Lambda)nh^2\}. \end{aligned}$$

Здесь $\Lambda = \sup f(\lambda)$ — верхняя грань спектральной плотности ξ , $\lambda_1^{(n)}, \lambda_2^{(n)}, \dots, \lambda_n^{(n)}$ — собственные числа матрицы ковариаций вектора $\{\xi(x_i), i=1, 2, \dots\}$ и использована важная теорема [3] о том, что $\lambda_i^{(n)}$ при любых i, n оцениваются сверху и снизу, соответственно, через $\sup f(\lambda)$ и $\inf f(\lambda)$.

Другой метод доказательства утверждений типа теоремы 9.4 может быть основан на теории полиномов Вика от гауссовских случайных величин (определения и основные свойства см. [11], гл. II и, особенно, § 3). Здесь основную роль играет следующая фундаментальная лемма Малышева.

Лемма M (теорема 4, § 3, гл. II, [11]). Пусть $\xi_{t\alpha}, t \in T, \alpha \in A$ — двухпараметрическое гауссовское семейство, $\langle \xi_{t\alpha} \rangle = 0$,

$$\sum_{t:t' \neq t} \sum_{\alpha' \in A} |\langle \xi_{t\alpha} \xi_{t'\alpha'} \rangle| < d < \infty. \quad (9.3)$$

Положим

$$:\xi_t^y: =: \prod_{\alpha \in A} \xi_{t\alpha}^{m(\alpha)}: - \text{ВИКОВСКИЙ МОНОМ},$$

$$\gamma! = \prod_{\alpha \in A} m(\alpha)!, \quad \gamma!! = \prod_{\alpha \in A} m(\alpha)!!, \quad N = \sum |\gamma_i| = \sum_{i, \alpha} m_i(\alpha).$$

Тогда совместный момент n полиномов Вика допускает оценку

$$|\langle : \xi_{i_1}^{\gamma_1} : \dots : \xi_{i_n}^{\gamma_n} : \rangle| \leq d^{N/2} \prod_{i=1}^n \gamma_i!! \quad (9.4)$$

Подробное обсуждение леммы Малышева и ее приложений к перколяции см. [18].

Продемонстрируем применение леммы на примере теоремы 9.4'.

Теорема 9.4'. Пусть $\xi(x)$ — однородное гауссовское поле на Z^v и $\sum_{y \neq 0, y \in Z^v} |b(y)| = \sum_{y \neq 0} |\langle \xi(0) \xi(y) \rangle| = d < \infty$. Тогда поле $\xi(x)$ принадлежит классу PF .

Доказательство. Предположим сначала, что $d < \sigma^2 = b(0)$. Нормированные полиномы Вика $\frac{:\xi^n:}{\sqrt{n! \sigma^n}}$, где $\sigma^2 = \langle \xi^2 \rangle$, образуют полную ортонормированную (относительно гауссовского веса) систему в $L^2(\mathbb{R}^1)$. Поэтому

$$\chi_{[h, \infty)}(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{:\xi^n:}{\sqrt{n! \sigma^n}}$$

Стало быть, по лемме M :

$$\begin{aligned} P\{\xi(x_1) > h, \dots, \xi(x_n) > h\} &= \langle \prod_{i=1}^n \chi_{[h, \infty)}(\xi(x_i)) \rangle = \\ &= \sum_{k_1 \dots k_n} a_{k_1} \dots a_{k_n} \frac{\langle : \xi^{k_1}(x_1) : \dots : \xi^{k_n}(x_n) : \rangle}{\sqrt{k_1!} \dots \sqrt{k_n!} \sigma^{k_1 + \dots + k_n}} \leq \\ &\leq \sum_{k_1 \dots k_n} \left(\frac{d}{\sigma^2} \right)^{\frac{k_1 + k_2 + \dots + k_n}{2}} |a_{k_1}| \dots |a_{k_n}| \leq \\ &\leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{d}{\sigma^2} \right)^{k/2} |a_k| \right)^n \leq \left(\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{d}{\sigma^2} \right)^i \sum_{i=0}^{\infty} a_i^2 \right) \leq (A(h))^{n/2} \end{aligned}$$

$$\text{Но } \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 = \|\chi_{[h, \infty)}\|^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \int_h^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx \xrightarrow{h \rightarrow \infty} 0.$$

Поэтому при $h > h^+$ мы получаем, что $A(h) < 1$, и нужная оценка получена. От условия $d < \sigma^2$ легко избавиться процедурой «прореживания» величин $\xi(x_i)$.

Хотя утверждение теоремы 9.4' несколько слабее, чем теоремы 9.4, но зато ее метод намного более универсален. Почти

дословно повторяя предыдущие рассуждения, можно установить следующие результаты (уже для негауссовских полей).

Теорема 9.5. Пусть $F(x_1, \dots, x_N)$ — измеримая функция N переменных, $\xi(x)$, $x \in \mathbb{Z}^v$, — однородное гауссовское поле с абсолютно суммируемыми корреляциями, U — окрестность точки $0 \in \mathbb{Z}^v$, содержащая N точек. Введем поле $\eta(x)$ (функцию от гауссовского)

$$\eta(x) = \sum_{x'_i \in U+x} F(x'_1, \dots, x'_N).$$

Тогда $\eta(x)$ принадлежит классу PF .

Теорема 9.6. Пусть (в условиях теоремы 9.5) $\zeta(x)$ — поле, полученное из $\xi(x)$ гиббсовской перестройкой с финитным потенциалом взаимодействия F . Тогда $\zeta(x)$ принадлежит классу PF .

Отметим, наконец, что недавно В. И. Питербарг [23] существенно усилил результаты теоремы 9.4, 9.4'. Используя энтропийные соображения, которые сейчас широко используются в теории гауссовских процессов, он доказал следующий результат.

Теорема 9.7. Если корреляционная функция $b(y)$, $y \in \mathbb{Z}^v$, гауссовского центрированного решетчатого поля $\xi(x)$, $x \in \mathbb{Z}^v$, допускает при $|y| > 2$ оценки

$$\begin{aligned} |b(y)| &< \frac{C}{|\ln |y||^{2+\varepsilon}}, \\ |\Delta_i b(y)| &< \frac{C}{|\ln |y||^{3+\varepsilon} |y|}, \\ |\Delta_i \Delta_j b(y)| &< \frac{C}{|\ln(|y|)|^{4+\varepsilon} |y|^2}, \end{aligned}$$

где Δ_i, Δ_j — первые разности по аргументам y_i, y_j и дополнительно выполняются некоторые условия регулярности, то поле $\xi(x)$ просачивается на бесконечность на достаточно высоком уровне.

Отметим, что для более медленной, чем логарифмическая, скорости убывания корреляций можно построить примеры гауссовских полей на решетке \mathbb{Z}^v (или ее подмножеств), которые не просачиваются на бесконечность ни на каком уровне. Другие (уже негауссовские) контрпримеры этого типа см. в [19, 21]. Во всех этих контрпримерах корреляции полей $\xi(x)$ убывают достаточно медленно, но сами поля удовлетворяют хорошим условиям перемешивания, имеют высокие моменты и т. п.

б) Перейдем к непрерывному случаю. Пусть $\xi(x)$, $x \in \mathbb{R}^v$, $v \geq 2$, однородное непрерывное п. н. поле. Будем говорить, что оно просачивается на бесконечность на уровне h , если множество $A_h^+ = \{x : \xi(x) \geq h\}$ распадается на непересекающиеся компакты, расстояния между которыми не меньше, чем фиксированная постоянная ρ_0 , а множество $A_h^- = \{x : \xi(x) < h\}$ содер-

жит уходящую на бесконечность кривую γ вместе с ее ρ_0 -окрестностью.

Постоянная $\rho_0 > 0$ введена для того, чтобы избежать трудностей, связанных с рассмотрением типичных для непрерывного случая множеств уровня канторовского типа. По той же причине не сохранено условие связности упомянутых выше компактных компонент A_h^+ .

Следующая теорема доказывается дискретизацией.

Теорема 9.8 ([20]). Пусть R^v разбито решеткой Z^v на единичные кубы. Если для произвольного множества таких кубов Q_1, \dots, Q_N

$$P \left\{ \sup_{x \in Q_1} \xi(x) > h, \dots, \sup_{x \in Q_N} \xi(x) > h \right\} \leq c g^v(h), \quad (9.5)$$

где $g(h) \searrow 0$, $h \rightarrow +\infty$, то найдется уровень h^+ такой, что при $h > h^+$ поле $\xi(\cdot)$ просачивается на уровне h .

Следствие. Непрерывное поле с конечным радиусом корреляций просачивается на любом достаточно высоком уровне.

Теорема 9.8 не вполне конструктивна. Следующий результат, являющийся комбинацией известной теоремы А. Н. Колмогорова о выборочной непрерывности случайных полей и теоремы 9.8, удобнее для приложений [20].

Теорема 9.9. Пусть существуют постоянные $\alpha, \beta > 0$, такие что для любых $h, \Delta > 0$ и произвольных пар точек $(x_j, y_j) \in Q$ из произвольного множества кубических ячеек Z^v

$$P \left\{ \bigcap_{j=1}^n (\xi(x_j) < h, \xi(y_j) > h + \Delta) \right\} \leq \alpha \prod_{j=1}^m p \{ \xi(x_j) < h, \xi(y_j) > h + \Delta \}^\beta \quad (9.6)$$

и, кроме того,

$$P \{ \xi(x) < h, |\xi(x) - \xi(y)| > \Phi(|x - y|) \} \leq g(h) \Phi(|x - y|), \quad (9.6')$$

где функции g, Φ таковы, что $g(x) \searrow 0$, $\Phi(x) \searrow 0$, $x \rightarrow 0$ и

$$\sum_{k=1}^{\infty} g\left(\frac{1}{2^k}\right) < \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} 2^{kv} \Phi\left(\frac{1}{2^k}\right) < \infty. \quad (9.6'')$$

Следствие [20]. Если $R(t) = \langle \xi(t) \cdot \xi(0) \rangle$ — корреляционная функция гауссовского поля и

$$а) |R(0) - R(t)| \leq C \ln^{-(1+\varepsilon)} \frac{1}{|t|}, \quad \varepsilon > 0;$$

$$б) |R(t)| \leq f(|t|), \quad \text{где } f(x) \searrow 0, x \rightarrow \infty \text{ и } \int_0^{\infty} x^{v-1} f(x) dx < \infty;$$

$$в) |\text{grad } R(t)| \leq C_1 f(t);$$

г) $\left\| \frac{\partial^2 R}{\partial t_i \partial t_j} \right\| \leq C_2 f(t)$. Тогда поле $\xi(x)$ просачивается на бесконечность на достаточно высоком уровне.

Условие а) гарантирует непрерывность ξ и, по существу, не улучшаемо. Условия б) — г) означают суммируемость корреляционной функции на бесконечности и ее регулярность. Вполне вероятно, что и здесь действует теорема В. И. Питербарга, т. е. суммируемость $R(t)$ можно заменить убыванием логарифмического типа.

Другие следствия из теоремы 9.8, 9.9 см. в [20].

в) Общие результаты о просачивании случайных полей на высоком уровне могут применяться к разнообразным физическим моделям, в частности, к задачам осреднения. Проиллюстрируем это примерами из п. 5° введения, т. е. рассмотрим вопрос о перколяции первого достижения.

Рассмотрим сначала дискретный случай. Пусть $\xi(x) > 0$, $x \in Z^v$ — однородное эргодическое поле на решетке. Введем функцию $t(x, y) = \inf_{\gamma: x \rightarrow y} \sum_{z \in \gamma} \xi(z)$. Здесь γ — связный путь, ведущий из x в y ,

который, не ограничивая общности, можно считать самонепересекающимся. Как и в п. 5° введения, определим функцию $f(a, b) = t(x_a, x_b)$, где $x_a = (0, 0, \dots, a)$, $x_b = (0, 0, \dots, b)$, характеризующую скорость распространения «волны» вдоль одной из координатных осей (в нашем случае, оси x). Легко показать, что процесс $f(a, b)$ субаддитивен в смысле Кингмана [53], однороден и эргодичен. По субаддитивной теореме Кингмана существует, возможно бесконечный,

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{f(0, a)}{a} = \mu.$$

Теорема 9.10 (Смит, Вирман [53]). Если поле $\xi(x)$ образовано независимыми величинами и $\langle \xi \rangle < \infty$, то $\mu < \infty$.

Фактически эта теорема верна для произвольных эргодических однородных полей с конечным средним $\langle \xi \rangle = m < \infty$.

В самом деле,

$$f(0, a) \leq \sum_{x \in [0, x_a]} \xi(x)$$

и поэтому

$$\mu \leq \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\sum_{x \in [0, a]} \xi(x)}{a} = m.$$

Собственно говоря, здесь не использованы перколяционные соображения. Но они важны для получения хороших верхних оценок μ . Типичное рассуждение выглядит так.

Фиксируем уровень h выше уровня h^+ протекания поля. Обозначим через $V(x)$ объем связанного A_h^+ кластера, содержащего точку x . Предположим, что $\langle V(x) \rangle = \alpha(h) < \infty$ (для полей с независимыми значениями это доказано, см. выше, в общем случае при быстром убывании корреляций) — это правдоподобная гипотеза. Во всяком случае, мы можем понимать h^+ как критический уровень в смысле среднего значения $h^+ = \inf \{h : \alpha(h) < \infty\}$. Отрезок $[0, x_a]$, $x_a = (0, \dots, a)$ пересекается с некоторым количеством связанных A_h^+ кластеров.

Рассмотрим путь $\hat{\gamma}: 0 \rightarrow x_a$, совпадающий с $[0, x_a]$ вне тех A_h^+ кластеров, которые пересекаются с $[0, x_a]$ и не содержат концевые точки, и обходит упомянутые «внутренние» кластеры по кратчайшему пути на их границах.

Если $p(h) = P\{\xi(x) > h\}$ — объемная плотность множества A_h^+ , то нетрудно показать, что

$$\sum_{\hat{\gamma}} \xi(x) \leq a(1 - p(h))h + ap(h)(\alpha(h) + 2),$$

т. е.

$$\mu \leq \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\sum_{x \in \hat{\gamma}} \xi(x)}{a} \leq (1 - p(h))h + p(h)(\alpha(h) + 2).$$

При $h \rightarrow +\infty$ первый член неограниченно растет, а при $h \searrow h^+$ становится бесконечным второй член. Найдем \min первой части. Это дает содержательную оценку μ .

Более детальное изучение константы μ , асимптотики при $\tau \rightarrow \infty$ «волнового фронта», который определяется как

$$B_\tau = \{x : t(0, x) \leq \tau\}$$

см. в [46, 53] и цитированной там литературе.

Распространение всех введенных результатов на случай непрерывных полей в \mathbb{R}^v — несложное упражнение, правда, точные оценки μ получать здесь трудно.

Задача о существовании среднего удельного сопротивления в сети случайных сопротивлений, о которой говорилось во введении, рассматривается близкими методами (см. [45]).

§ 10. Многомасштабные схемы перколяции

Строго говоря, объект, о котором пойдет речь, уже введен ранее. Именно, речь идет о непрерывных пуассоновских моделях случайных множеств S_i (например, шаров случайного радиуса). Разумеется, если разброс в размерах этих множеств невелик, мы можем надеяться, что все выводы теории, полученные в § 8 для множеств фиксированной формы, не только качественно, но и количественно сохраняются. В частности, критерии протекания, выраженные в терминах координацион-

ного числа или объемной концентрации дефектного множества, должны быть устойчивы по отношению к малым случайным возмущениям формы множеств (см., например [1]). Нетрудно получить и строгие результаты этого сорта.

Вопрос становится сложным, если разброс размеров S_i велик, т. е. масштабирован на много порядков. Как уже отмечалось во введении, попытка применить концентрационный критерий разрушения к геофизической среде сталкивается с большими трудностями. Интуитивно ясно, что «большие множества S_i » дают основной вклад в перколяционную картину, хотя «мелкие множества» могут заметно влиять и на объемную концентрацию дефектов и на координационное число.

Ниже мы коротко изложим содержание работ [2, 17, 32]. Основной качественный вывод из этих работ состоит в том, что наличие большого числа резко различающихся по величине типов дефектов (т. е. многомасштабность) вблизи порога протекания характеризуется увеличением объемной концентрации дефектного множества (она может быть сколько угодно близкой к 1) и увеличением координационного числа (среднего числа «соседей»). Оно может быть сколь угодно большим.

Мы коснемся лишь дискретных моделей случайной среды, обсуждаемых в [17, 32]. Перенесение соответствующих результатов на многомасштабные непрерывные модели — работа в значительной мере техническая [2], а сами результаты в основном сохраняются.

Дискретная многомасштабная случайная среда. Общая d -мерная модель этого типа зависит от 3-х параметров: $N+1$ — число масштабов или рангов «микродефектов», p — интенсивность микродефектов каждого ранга, v — шаг изменения масштаба.

Дефектное множество в R^d строится индуктивно. Сначала (нулевой шаг) пространство разбивается на единичные кубы основного масштаба $l_0=1$ и для каждого куба выбирается независимо от прочих с вероятностями p и q соответственно цвет — «черный» или «белый» (« C_0 », « B_0 », черный цвет указывает на дефектность куба). Множество черных единичных кубов обозначим через D_0 , оно имеет объемную плотность p (в стандартном эргодическом смысле). На следующем шаге каждый из белых кубов нулевого ранга разбивается на v^d одинаковых кубиков 1-го ($l_1 = \frac{1}{v}$) масштаба и каждый из кубиков первого масштаба с теми же вероятностями p и q раскрашивается в черный (C_1) и белый (B_1) цвета. Объединение черных кубиков 1-го ранга образует множество D_1 с объемной плотностью qp .

Повторяя этот процесс шаг за шагом, мы построим дефектные множества D_2, D_3, \dots, D_N , образованные черными кубиками масштабов $l_2=v^{-2}, \dots, l_N=v^{-N}$ с плотностями q^2p, \dots, q^Np .

Полное дефектное множество $D = \bigcup_{i=0}^N D_i$ имеет плотность

$$\rho = p + qp + \dots + q^N p = 1 - q^{N+1}.$$

«Нормальная» или «белая» часть R^d имеет дополнительную плотность q^{N+1} .

Для дефектного множества D имеет смысл постановка задачи протекания. Условимся считать, что два замкнутых черных куба $Ч_i, Ч_j$, имеющих хотя бы одну общую точку, связаны (это так называемая сильная или $\sqrt{2}$ -связность).

Дадим достаточные условия непротекания (в терминах ρ, N, v), ограничившись для упрощения формул двумерным случаем $d=2$. Применим несколько модифицированный контурный метод Хаммерсли (см. введение или § 3).

Назовем путем γ_n любую связную цепочку из n дефектных квадратов, число $n = |\gamma_n|$, будем называть его длиной, хотя, разумеется, геометрические размеры γ_n слабо связаны с n . Оценим вероятности события $B_n = \{\text{существует путь } \gamma_n, |\gamma_n| = n, \text{ который лежит в дефектном множестве } D, \text{ содержит фиксированную точку } x_0 \text{ и не имеет самопересечений}\}$.

Если фиксировать путь γ_n , то вероятность того, что все квадраты его составляющие — черные, не меньше, чем ρ^n . Оценим число различных путей длины N .

Каждому пути отвечает последовательность символов вида $Ч_1, Ч_1, Ч_3, Ч_3, Ч_2, Ч_5$. Обозначим через $k(i_n)$ число изменений (переключений) типа квадратов (то есть) символов вдоль γ_n . Например, на изображенном выше начальном отрезке пути три изменения $Ч_1 \rightarrow Ч_3, Ч_3 \rightarrow Ч_2, Ч_2 \rightarrow Ч_5$. Изменения бывают двух разных видов: вид \downarrow , при котором происходит уменьшение масштаба ($Ч_1 \rightarrow Ч_3, Ч_2 \rightarrow Ч_5$), и вид \uparrow , когда происходит его увеличение ($Ч_3 \rightarrow Ч_2$). Смысл обозначений $k\downarrow(\gamma_n)$ и $k\uparrow(\gamma_n)$ очевиден, как и равенство $k(\gamma_n) = k\downarrow(\gamma_n) + k\uparrow(\gamma_n)$. Ясно также, что $|k\uparrow(\gamma_n) - k\downarrow(\gamma_n)| \leq N$. Основное для дальнейшего наблюдение состоит в том, что при переходе типа \downarrow , скажем $Ч_2 \rightarrow Ч_5$, серия идущих подряд квадратов меньшего типа не может быть короче, чем v . Отсюда следует, что $k\downarrow(\gamma_n) \cdot v \leq n$, так что $k\downarrow(\gamma_n) \leq \frac{n}{v}$,

$k\uparrow(\gamma_n) \leq \frac{n}{v} + N$. Подсчитаем число вариантов переходов типа \downarrow и \uparrow . Ясно что при переходе \uparrow это число не превосходит $3(N-1)$: не более чем $N-1$ вариант выбора очередного символа и не более 3-х вариантов выбора соседнего квадрата.

Число вариантов переходов \downarrow (от больших квадратов к малым) существенно больше, но во всяком случае не превосходит

$$(4v^N + 4) + (4v^{N-1} + 4) + \dots + (4v + 4) \leq (N-1) \cdot (4v^N + 4),$$

(каждое последовательное слагаемое в левой части отвечает переходам $Ч_1 \rightarrow Ч_N, Ч_2 \rightarrow Ч_N, \dots, Ч_1 \rightarrow Ч_2$). Внутри каждой серии

одинаковых квадратов число способов выбрать соседа не превосходит 7 (за исключением, быть может, исходного символа, где оно равно 8, ср. с начальным рассуждением в случае $N=1$).

Итак, общее число путей γ_n длины n не превосходит

$$\begin{aligned} & 8 \cdot 7^{n-1} [(N-1) \cdot (4v^N + 4)]^{k \dagger} \cdot [3(N-1)]^{k \dagger} \leq \\ & \leq 8 \cdot 7^{n-1} (N-1) (4v^N + 4)^{\frac{n}{v}} \cdot [3(N-1)]^{\frac{n}{v} + N} \leq \\ & \leq C 7^n \left[(N-1)^{\frac{2}{v}} (4v^N + 4)^{\frac{1}{v}} 3^{\frac{1}{v}} \right]^n. \end{aligned}$$

Если

$$\sum_n P(B_n) \leq C \sum_n \left[7p(N-1)^{\frac{2}{v}} (4v^N + 4)^{\frac{1}{v}} 3^{\frac{1}{v}} \right]^n < \infty,$$

то по лемме Бореля—Кантелли множество D не перколирует.

Фиксируем N и подберем шаг v столь большим, чтобы

$$(N-1)^{\frac{2}{v}} (v+1)^{\frac{1}{v}} 12^{\frac{1}{v}} < \frac{8}{7},$$

тогда, очевидно, при $p \leq \frac{1}{8}$ перколяция будет отсутствовать.

Самое интересное явление в этой модели состоит в заметном увеличении объемной концентрации дефектного множества на пороге просачивания. В самом деле, при выбранных выше N и v

$$\rho = 1 - q^n > 1 - \left(1 - \frac{1}{8}\right)^N$$

и надлежащие N дают, скажем, $\rho > 0,9$; 0,99 и т. п.

Конечно, слишком большой шаг v масштабирования физически неестественен. Интересная задача — получить хорошие верхние и нижние оценки порога просачивания (в терминах, скажем, ρ) при фиксированном v (скажем, $v=2$) и больших N . Как он себя ведет при $N \rightarrow \infty$?

Заметим, что критическое координационное число β_{cr} в тех же предположениях неограниченно велико при $N, v \rightarrow \infty$. Оно понимается следующим образом. Пусть η — типичная точка D (т. е. η равномерно распределено в $D \cap V$, V — большой объем).

Найдем число ξ соседей у черного квадрата, содержащего η . Тогда $\langle \xi \rangle$ (при $v \rightarrow \infty$) дает, по определению, координационное число D .

Опишем теперь (для введенной выше среды) многомасштабную модель разрушения, следуя [31]. Она, по-видимому, правильно обобщает критерий С. Н. Журкова на многомасштабный случай.

Разрушение масштабированной среды определяется индуктивно. Цель такого определения — формализовать ту естест-

венную мысль, что разрушение элементарного блока происходит за счет «сильного развития» микродефектов меньшего ранга.

Будем называть куб некоторого масштаба i белым, если он оставался таковым после того, как были распределены дефекты до i -го ранга включительно.

Рассмотрим белый куб $(N-1)$ -го масштаба, в котором, как описано выше, по бернуллиевской схеме расположено некоторое количество черных кубов последнего, N -го масштаба. Будем говорить, что он является «прочным», если существуют связные цепочки кубиков N -го масштаба, которые соединяют любые пары противоположных граней. Связность при этом мы будем понимать как соседство кубиков по граням. Если куб не является «прочным», мы объявляем его «разрушенным». «Разрушение» в данном случае означает фактическое распадение множества белых кубиков на две несвязные компоненты, или, что то же самое, появление $(d-1)$ -мерной магистральной трещины.

Разумеется, возможны и другие критерии разрушения. Например, можно требовать, чтобы все v^d кубиков были черные или допускать связность вдоль диагоналей и т. п.

На следующем шаге мы выполняем перекодировку кубов $(N-1)$ -го ранга. Те из них, которые разрушены или же были дефектными с самого начала, считаются окрашенными в черный цвет, те, которые не были разрушены, считаются белыми. Тем самым, N -й масштаб полностью исключается из рассмотрения.

Дальше все повторяется заново для $(N-2)$ -го масштаба с тем же самым критерием разрушения и т. д. В конце концов останутся черные и белые кубы единственного основного масштаба $l_0=1$. Если дефектное множество D^* черных (или разрушенных) кубов, которое, разумеется, не совпадает с исходным множеством D , содержит бесконечный класс, мы говорим, что в исходной системе возникла магистральная трещина. В противном случае мы говорим, что магистральной трещины, то есть разрушения, нет. Соотношение между разрушением, в указанном выше смысле, и классическим протеканием множества D математически не вполне очевидно, хотя есть естественные физические причины полагать, что из классического протекания следует разрушение. Для математической теории «разрушения» основную роль будет играть функция

$$f(p) = P \left\{ \begin{array}{l} \text{куб } (N-1)\text{-го ранга разрушения в смысле критерия } K \text{ при условии, что на } (N-1)\text{-м шаге он был белым.} \end{array} \right.$$

Тогда очевидно, на 1-м этапе процесса «разрушения» плотность разрушенных кубов $(N-1)$ -го ранга будет равна

$$p_1 = p + (1-p)f(p) = F(p). \quad (10.1)$$

Плотность разрушенных кубов $(N-2)$ -го ранга будет равна

$$p_2 = p_1 + (1 - p_1) f(p_1) = F(p_1) = F(F(p)) = F_2(p)$$

и т. д.

В конце концов, когда останутся лишь кубы основного масштаба $l_0=1$, плотность соответствующего множества D^* будет равна

$$p_N = p_{N-1} + (1 - p_{N-1}) \cdot f(p_{N-1}) = \underbrace{F(F(\dots F(p)))}_{N \text{ раз}} = F_N(p). \quad (10.2)$$

Поскольку множество D^* одномасштабно и бернуллиево, то, как легко понять, критерий разрушения определяется порогом $p_{cr}^{(1)}(d)$, совпадающим с критической вероятностью протекания в d -мерной задаче узлов. В итоге мы приходим к явно формулируемому критерию «разрушения».

Для того чтобы исходная система была разрушена, необходимо и достаточно, чтобы

$$F_N(p) > p_{cr}^{(1)}(d),$$

т. е.

$$p > F_N^{-1}(p_{cr}^{(1)}(d)).$$

Для небольших ν ($\nu=2,3$) и размерностей $d=2,3$ можно явно подсчитать полиномы $f(p)$ и $F(p)$ (см. [31]). Изучение их итераций — красивая и не очень трудная задача.

Удается установить [31], что даже при фиксированном ν и $N \rightarrow \infty$ критическая объемная концентрация на пороге разрушения (но не протекания!) стремится к 1, что критическое координатное число велико при $N \rightarrow \infty$ и т. п. Тем более эти результаты сохраняются при больших ν .

ЛИТЕРАТУРА

1. Брагинский Р. П., Гнеденко Б. В., Молчанов С. А., Пешков И. Б., Рыбников К. А., Математические модели старения полимерных изоляционных материалов. Докл. АН СССР, 268, № 2, 281—284 (РЖМат, 1983, 7В304)
2. Голосов А. О., Молчанов С. А., Резникова А. Я., Непрерывные модели протекания в теории разрушения. В кн. Вычислительная сейсмология, 1986, вып. 20 (в печати)
3. Гренандер У., Сеге Г., Теплицевы формы и их приложения. Пер. с англ. М.: ИЛ, 1961, 308 с. (РЖМат, 1963, 5Б38К)
4. Жен П.-Ж. де, Идеи скейлинга в физике полимеров. М.: Мир, 1982, 368 с.
5. Журков С. Н., Куксенко В. С., Петров В. А. и др., К вопросу о прогнозировании разрушения горных пород. Изв. АН СССР, Физика Земли, 1977, № 6, 118
6. —, —, Образование субмикроскопических трещин в полимерах под нагрузкой. ФТТ, 1969, № 11, 296
7. Зельдович Я. Б., Перколяционные свойства двумерного случайного магнитного поля. Письма в ЖЭТФ, 1983, 38, вып. 2, 51—54

8. Зуев С. А., Сидоренко А. Ф., Непрерывные модели теории протекания I. Теор. и мат. физ., 1985, 62, № 1, 76—86 (РЖМат, 1985, 5B273)
9. —, —, Непрерывные модели теории протекания II. Теор. и мат. физ., 1985, 62, № 2, 253—262
10. Красносельский М. А., Положительные решения операторных уравнений. М.: Физматгиз, 1962, 394 с. (РЖМат, 1963, 8B422)
11. Малышев В. А., Минлос Р. А., Гиббсовские случайные поля. М.: Наука, 1985, 288 с.
12. Матерон Ж., Случайные множества и интегральная геометрия. Пер. с англ. М.: Мир, 1978, 318 с. (РЖМат, 1979, 2B71 K)
13. Меньшиков М. В., Оценки перколяционных порогов для решеток в R^n . Докл. АН СССР, 1985, 284, № 1, 36—39
14. —, Совпадение критических точек в задачах перколяции. Докл. АН СССР, 1986 (в печати)
15. Минлос Р. А., Храпов П. В., О протекании в конечной полосе для непрерывных систем. Вестн. МГУ. Сер. мат. мех., 1985, 1, № 1, 56—59 (РЖМат, 1985, 5B272)
16. Митюшин Л. Г., О некоторых многомерных системах автоматов, связанных с задачами просачивания. Пробл. передачи информ., 1975, 11, № 3, 101—103 (РЖМат, 1976, 5B7)
17. Молчанов С. А., Писаренко В. Ф., Резяиков А. Я., О перколяционном подходе в теории разрушения. В кн. Вычислительная сейсмология, 1985, вып. 19 (в печати)
18. —, Степанов А. К., Оценка В. А. Малышева и ее приложения. В сб. «Случайные процессы в полях». М., МРУ., 1979, 39—48
19. —, —, Просачивание случайных полей. I. Теор. мат. физ., 1983, 55, № 2, 246—256
20. —, —, Просачивание случайных полей II. Теор. мат. физ., 1983, 55, № 3, 419—430
21. —, —, Просачивание случайных полей III. Теор. мат. физ., 1985, 65, № 3, 371—379
22. Петров В. А. Основы кинетической теории разрушения и его прогнозирование. В сб. «Физические основы прогнозирования разрушения горных пород», М.: Наука, 1974, 312
23. Питербарг В. И., О перколяции гауссовских полей. В сб. «IV Междунар. Вильнюсская конф. по теории вероятностей и мат. статист. Тезисы докл., т. 3». Вильнюс, 1985, 204—206
24. Садовский М. А., О моделях геофизической среды и сейсмического процесса. В сб. «Прогноз землетрясений», Душанбе—Моск., Дониш, 1983—1984, № 4, 268
25. Севастьянов Б. А. Ветвящиеся процессы. М.: Наука, 1971, 436 с. (РЖМат, 1972, 3B165K)
26. Храпов П. В., О протекании в конечной полосе. Вестн. МГУ. Сер. мат. мех., 1985, № 4, 10—13 (РЖМат, 1985, 11B299)
27. Челидзе Т. Л., Колесников Ю. М., Моделирование и прогноз процесса разрушения в рамках теории протекания. Изв. АН СССР, Физика Земли, 1983, № 5, 24—34
28. Шкловский Б. И., Эфрос А. Л., Электронные свойства легированных полупроводников. М.: Наука, 1979, 416 с.
29. Эфрос А. Л., Физика и геометрия беспорядка. М.: Наука, 1982, 176 с.
30. Aizenman M., Delyon F., Souillard B., Lower bounds on the cluster size distribution. J. Stat. Phys., 1980, 23, № 3, 267—280 (РЖМат, 1981, 7B247)
31. —, Newman C. M., Tree graph inequality and critical behavior in percolation models. J. Stat. Phys., 1984, 36, № 1—2, 103—143 (РЖМат, 1985, 4B316)
32. Allegre C. J., Le Mouel J. L., Provost A., Scaling rules in rock fracture and possible implications for earth quake prediction. Nature, 1982, 297, № 5861, 47—49
33. Berg J. van den, Disjoint occurrences of events: Results and conjectures. Contemp. Math., 1985, 41, 357—361

34. —, *Keane M.*, On the continuity of the percolations probability function. *Contemp. Math.*, 1984, 26, 61—65 (PJKMar, 1985, 6B300)
35. —, *Kesten H.*, Inequalities with applications to percolations and reliability. *J. Appl. Probab.*, 1985, 22, № 3, 556—569
36. *Campanino M.*, *Russo L.*, An upper bound on the critical percolations probability for the three-dimensional cubic lattice. *Ann. Probab.*, 1985, 13, № 2, 478—491
37. *Chelidze T. L.*, Percolation and fracture. *Fears and Planet. Interiors*, 1982, 28, 93—101
38. *Durrett R.*, Some general results concerning the critical exponents of percolation processes. *Z. Wahrscheinlichkeitstheor und verw. Geb.*, 1985, 69, 421—437 (PJKMar, 1985, 12B271)
39. —, *Nguen B.*, Thermodynamic inequalities for percolation. *Commun. Math. Phys.*, 1985, 99, № 2, 253—269 (PJKMar, 1985, 12B270)
40. *Fortuin G. M.*, *Kasteleyn P. W.*, *Ginibre J.*, Correlation inequalities on some partially ordered sets. — *Commun. Math. Phys.*, 1971, 22, № 2, 89—103
41. *Hammersley J. M.*, Percolation processes: lower bounds for the critical probability. *Ann. Math. Statistics*, 1957, 28, № 3, 790—795 (PJKMar, 1959, 5066)
42. *Harris T. E.*, A lower bound for the critical probability in a certain percolation process. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 1960, 56, № 1, 13—20 (PJKMar, 1961, 1B211)
43. *Higuchi Y.*, Coexistence of the infinite (*) clusters. A remark on the square lattice site percolation. *Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb.*, 1982, 61, № 1, 75—81
44. *Kesten H.*, The critical probability of bond percolation on the square lattice equal $1/2$. *Commun. Math. Phys.*, 1980, 74, № 1, 41—54 (PJKMar, 1981, 2B431)
45. —, Percolation theory for mathematicians. Boston e. a.: Birkhäuser, 1982, 423 pp. ill. (Progr. Probab. and Statist., Vol.) (PJKMar, 1985, 6B298K)
46. —, First-passage percolation and a higher dimensional generalization. *Contemp. Math.*, 1985, 41, 235—251
47. *Newman C. M.*, *Schulman L. S.*, Number and density of percolating clusters. *J. Phys. A: Math. and Gen.*, 1981, 14, 1735—1743 (PJKMar, 1982, 2B237)
48. —, —, Infinite clusters in percolation models. *J. Stat. Phys.*, 1981, 26, № 3, 613—628
49. *Ord G.*, *Whittington S. G.*, Lattice decorations and pseudo-continuum percolation. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1980, 13, L307—L310
50. *Russo L.*, On the critical percolation probabilities. *Z. Wahrscheinlichkeitstheor und verw Geb.*, 1981, 56, 229—237
51. *Sykes M. F.*, *Essam J. W.*, Exact critical percolation probabilities for site and bond problems in two dimensions. *J. Math. Phys.*, 1964, 5, 1117—1127
52. *Shante V. K.*, *Kirkpatrick S.*, An introduction to percolation theory. *Adv. Phys.*, 1971, 20,
53. *Smythe R. T.*, *Wierman J. C.*, First-passage percolation on the square lattice. *Lect. Notes Math.*, 1978, 671, VIII, 195 pp., ill. (PJKMar, 1979, 5B517)
54. *Toth B.*, A lower bound for the critical probability of the square lattice site percolation. — *Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb.*, 1935, 59, 19—22 (PJKMar, 1985, 8B162)
55. *Wierman J. C.*, Bond percolation on honeycomb and triangular lattices. *Adv. Appl. Probab.*, 1981, 13, 298—313 (PJKMar, 1981, 10B8)
56. —, Counterexample in percolation: the site percolation critical probabilities p_B and p_T are unequal for a class of fully triangulated graphs. *J. Phys. A: Math. and Gen.*, 1984, 17, 637—646 (PJKMar, 1984, 8B265)
57. —, A bond-percolation critical probability determination based on the star-triangle transformation. *J. Phys. A: Math. and Gen.*, 1984, 17, 1525—1530 (PJKMar, 1984, 11B242)
58. —, Duality for directed site percolations. — *Contemp. Math.*, 1985, 41, 363—380

УЛЬТРАФИОЛЕТОВЫЕ ПРОБЛЕМЫ В ТЕОРИИ ПОЛЯ И МНОГОМАСШТАБНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ

В. А. Малышев

Настоящий обзор, предназначенный для быстрого введения и ознакомления с ситуацией, посвящен в основном методу многомасштабных кластерных разложений. Этот метод лежит в настоящий момент в центре современной математической физики и имеет уже большое число применений: ультрафиолетовые и инфракрасные проблемы в теории поля, фазовые переходы в системах с непрерывной симметрией, случайные блуждания без самопересечений и др. Владение этим методом предполагает изучение многих его простейших примеров, приемов и идей, часть из которых мы и поместили в настоящий обзор, выбрав из применений ультрафиолетовые (и частично инфракрасные) проблемы.

Основная линия развития этого метода в настоящее время представляется следующей. Возникновение его следует связывать с работой Глимма—Джаффе [2], которая, однако, использовала более ранние идеи Глимма. Эта работа была плохо понята из-за своей крайней технической сложности и развивалась несколькими сотрудниками Глимма и Джаффе.

Существенные идеи внес Галлаветти. Однако окончательное (или близкое к нему) оформление с полным использованием ренормгруппы и картины Вильсона метод получил в последних работах Гавендзкого—Купьяйна (подробнее см. § 4, гл. 3).

С точки зрения классической теории вероятностей, рассматриваемый круг вопросов можно охарактеризовать так.

Рассмотрим трансляционно-инвариантное гауссово поле $\xi(x)$, $x \in R^V$, и будем изучать его гиббсовские перестройки с малым параметром λ при взаимодействии. Если $\langle \xi(x) \rangle = 0$ и $\int_{R^V} |\langle \xi(0) \xi(x) \rangle| dx < \infty$, то эта область доступна обычным кластерным разложениям. При этом, правда, надо предположить непрерывность $\xi(x)$ в каком-либо смысле или рассматривать поле $\xi(x)$ на решетке. Если условие абсолютной интегрируемости не выполнено, то контроль над предельной гиббсовской перестройкой называется инфракрасной проблемой. Если же $\xi(x)$ — обоб-

ценное поле с $\langle \xi(0) \xi(x) \rangle \sim \frac{C}{|x|^\alpha}$ при $|x| \rightarrow 0$, то трудности (зависящие от ν и α) возникают уже при контроле над гиббсовской перестройкой в конечном объеме — ультрафиолетовая проблема. При этом замечательно, что для применения техники многомасштабных разложений в конечном объеме не требуется малости λ . Далее, после построения гиббсовской перестройки в конечном объеме надо применять либо обычные, либо многомасштабные кластерные методы для термодинамического предельного перехода. Можно строить поле и сразу в бесконечном объеме.

Краткое содержание статьи следующее. В § 1 главы 1 дана сводка основных понятий из евклидовой квантовой теории поля, в § 2 — элементы диаграммной техники, § 3 — основы классической теории перенормировок. Простейшие применения метода многомасштабных разложений относятся к доказательству «наилучших» оценок диаграмм и БПХЦ-теоремы (см. § 4).

Глава 2, которая может читаться независимо от главы 1, посвящена введению в технику Гавендзкого—Купьянена, основанную на начальных идеях Вильсона. В §§ 1, 3 вводится ренормгруппа Вильсона и описывается стратегия Вильсона в нужном нам виде. В § 2 подробно рассматриваются нужные для дальнейшего одномасштабные кластерные разложения для фермиполей на R^ν . В § 4 рассматривается инфракрасно асимптотически свободная фермионная модель — аналог модели ϕ^4 , $\nu > 4$, при критическом значении массы и значении массы, большем критического. Случай $\nu = 4$ не рассматривается, но он не требует особых усложнений. В § 5 строится ультрафиолетовая асимптотически свободная модель — фермионный аналог модели ϕ^4 . Мы применяем несколько другой метод пересуммирования, чем Гавендзкий—Купьянен.

Особое место во всей этой проблеме занимает трактовка «больших значений» поля, которая и отличает бозонный случай. Введение в эту проблему дается в § 5 главы 1, примерно соответствующем начальным идеям Галлавогги. Модель ϕ^4 построена в § 6 главы II. Мы не рассматриваем здесь во всей полноте технику Гавендзкого—Купьянена борьбы с большими значениями поля. Существует мнение, что этот вопрос может оказаться основным при построении четырехмерных моделей Янга—Милса и в нем нет сейчас полной ясности.

В §§ 1, 2 главы 3 рассматриваются тесно связанные с данной проблематикой вопросы одномасштабных кластерных разложений: гиббсовские перестройки гуассовых полей на R^ν , поля с дальнедействующим неограниченным потенциалом. В § 3 кратко обсуждаются две важные идеи Федербуша и Бэттла. В § 4 дан краткий библиографический обзор.

В основной части статьи свободно используются стандартные приемы и понятия из теории кластерных разложений. Многие куски работы можно читать независимо от других. Принята следующая система нумераций, где, например, ссылка (2.4.1) означает формулу (2) в § 4 главы 1.

Автор благодарит Джаффе и Купьянена за полезные обсуждения:

Глава 1

ПЕРЕНОРМИРОВКИ И МНОГОМАСШТАБНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ

§ 1. Основные определения

Здесь мы кратко напомним некоторые основные определения евклидовой квантовой теории поля в нужном нам виде (подробнее см. [3, 8]).

Алгебра \mathfrak{A} . Далее \mathcal{L} в зависимости от контекста будет означать пространство вещественных (иногда комплексных) функций $C_0^\infty(R^v)$, $S(R^v)$ или их пополнение по некоторому скалярному произведению. Мы будем рассматривать изоморфные \mathcal{L} пространства \mathcal{L}_B и \mathcal{L}_F : элементы \mathcal{L} обозначаются Φ , элементы \mathcal{L}_B — $\xi(\Phi)$, элементы \mathcal{L}_F — $\psi(\Phi)$. Таким образом, например,

$$\xi(\lambda_1\Phi_1 + \lambda_2\Phi_2) = \lambda_1\xi(\Phi_1) + \lambda_2\xi(\Phi_2), \quad \lambda_i \in R. \quad (1)$$

Пусть $P(\mathcal{L})$ — алгебра коммутативных многочленов от $\xi(\Phi)$. $G(\mathcal{L})$ — грассманова (супер)алгебра над \mathcal{L}_F . Можно ввести несколько экземпляров таких алгебр (индексы) и рассмотреть (супер)алгебру \mathfrak{A} с единицей, являющуюся их тензорным произведением. Образующими \mathfrak{A} являются $\xi_1(\Phi), \dots, \xi_m(\Phi), \psi_1(\Phi), \dots, \psi_n(\Phi), \Phi \in \mathcal{L}$.

Замечание 1. Далее число грассмановых образующих всегда четно $n = 2k$, и обозначаются они $\psi_i(\Phi), \bar{\psi}_i(\Phi), i = 1, \dots, k$. (Чтобы можно было определить OS -положительный фермиевский белый шум, см. ниже (10).)

Гауссовы функционалы. Мы будем изучать линейные функционалы $\langle \cdot \rangle$ на \mathfrak{A} со свойством $\langle 1 \rangle = 1$. Такой функционал называется гауссовым (с нулевыми средними), если для любых мономов

$$B = \xi^{(1)} \dots \xi^{(k)}, \quad F = \psi^{(1)} \dots \psi^{(n)},$$

где, например, $\xi^{(1)} = \xi_{i_1}(\Phi_{i_1})$ и т. д., имеет место

$$\langle BF \rangle = \langle B \rangle \langle F \rangle; \quad (2)$$

2)

$$\langle B \rangle = \begin{cases} 0, & \text{если } k \text{ нечетно,} \\ \sum \langle \xi^{(i_1)} \xi^{(j_1)} \rangle \dots \langle \xi^{(i_l)} \xi^{(j_l)} \rangle, & \text{если } k = 2l, \end{cases} \quad (3)$$

и сумма берется по всем разбиениям множества $\{1, \dots, k\}$ на неупорядоченные пары $\{i_1, j_1\}, \dots, \{i_l, j_l\}$;

3)

$$\langle F \rangle = \begin{cases} 0, & \text{если } n \text{ нечетно,} \\ \sum (-1)^{|\pi|} \langle \psi^{(i_1)} \psi^{(j_1)} \rangle \dots \langle \psi^{(i_m)} \psi^{(j_m)} \rangle, & \text{если } n = 2m, \end{cases} \quad (4)$$

и сумма берется по всем подстановкам $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & 2m \\ i_1 & j_1 & \dots & j_m \end{pmatrix}$ таким, что $i_1 < j_1, \dots, i_m < j_m, i_1 < i_2 < \dots < i_m, |\pi|$ — четность π .

Положительность Нельсона — Симанзика. Мы говорим, что функционал $\langle \cdot \rangle$ на $P(\mathcal{L})$ удовлетворяет этому свойству, если существует вероятностное пространство (Ω, Σ, μ) , случайные величины $\xi_i(\varphi)$ на нем (т. е. обобщенное случайное поле). $\varphi \in \mathcal{L}$, что для любого монома B

$$\langle B \rangle = \int_{\Omega} B d\mu. \quad (5)$$

Физическая положительность (или *OS*-положительность) Введем инволюцию θ :

$$\text{в } R^v - \theta x = \theta(x^1, \dots, x^v) = (x^1, \dots, x^{v-1}, -x^v),$$

на функциях на $R^v - (\theta\varphi)(x) = \bar{\varphi}(\theta x)$, на $P(\mathcal{L})$ и $G(\mathcal{L}) - \theta\xi(\varphi) = \xi(\theta\varphi)$,

$$\theta\psi_{\alpha}(\varphi) = \varepsilon_{\alpha} \bar{\psi}_{\pi(\alpha)}(\theta\varphi), \quad \theta\bar{\psi}_{\alpha}(\varphi) = \tilde{\varepsilon}_{\alpha} \psi_{\pi(\alpha)}(\theta\varphi), \quad \theta^2 = 1, \quad (6)$$

где π — подстановка индексов ($\pi^2 = 1$) и $\varepsilon_{\alpha}, \tilde{\varepsilon}_{\alpha} = \pm 1$. Конкретные значения π и знаков $\varepsilon_{\alpha}, \tilde{\varepsilon}_{\alpha}$ удобно выбирать в зависимости от модели.

Инволюцию θ можно продолжить антилинейно на \mathfrak{A} , если потребовать, чтобы для всех $A_1, A_2 \in \mathfrak{A}$

$$\theta(A_1 A_2) = \theta(A_2) \theta(A_1). \quad (7)$$

Обозначим \mathfrak{A}_+ — подалгебру \mathfrak{A} , порожденную всеми $\xi(\varphi), \psi(\varphi), \bar{\psi}(\varphi)$ с $\text{supp } \varphi \subset \{x : x^v > 0\}$.

Функционал $\langle \cdot \rangle$ на \mathfrak{A} называется *OS*-положительным, если для всех $A \in \mathfrak{A}_+$

$$\langle (\theta A) A \rangle \geq 0. \quad (8)$$

Физическое гильбертово пространство. Введем в \mathfrak{A}_+ пред- скалярное произведение

$$(A_1, A_2) = \langle (\theta A_1) A_2 \rangle. \quad (9)$$

Обозначим I_0 — подпространство всех $A \in \mathfrak{A}_+$ с нулевой нормой-

Замыкание факторпространства \mathfrak{A}_+/I_0 по этому скалярному произведению называется физическим гильбертовым пространством $H_{\text{физ}}$.

Белый шум. Это есть гауссов функционал $\langle \cdot \rangle_{\sigma^2}$, определяемый посредством

$$\begin{aligned} \langle \xi_\alpha(\Phi) \xi_\beta(\Phi') \rangle_{\sigma^2} &= \delta_{\alpha\beta}(\Phi, \Phi') \sigma^2, \\ \langle \bar{\psi}_\alpha(\Phi) \bar{\psi}_\beta(\Phi') \rangle_{\sigma^2} &= \delta_{\alpha\beta}(\Phi, \Phi') \sigma^2, \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$(\Phi, \Phi') = \int_{R^v} \Phi(x) \overline{\Phi'(x)} dx. \quad (11)$$

Он обладает свойством физической положительности (тривиальным образом) и положительности Нельсона—Симанзика на $P(\mathcal{L})$.

Урезания. Если фиксирована функция $\kappa = \kappa(\cdot) \in \mathcal{L}$, то будем обозначать ее сдвиг на x через

$$\kappa_x = \kappa(\cdot - x),$$

и положим

$$\xi_\kappa(x) = \xi(\kappa_x).$$

Если κ есть δ -функция (и она принадлежит \mathcal{L}), то положим $\xi_\delta(x) \equiv \xi(x)$, $\psi(x) = \psi_\delta(x)$ и т. д. $\xi(x)$ называется полем в точке, а $\xi_\kappa(x)$ — урезанным полем в точке. Лагранжианом $L(x, \kappa)$ будем называть многочлен от $\xi_{\alpha, \kappa}(x)$, $\psi_{\alpha, \kappa}(x)$ и их производных. Положим $L(x) = L(x, \delta)$.

Евклидово действие. Так называется выражение

$$U_{\Lambda, \kappa} = \int_{R^v} \chi_\Lambda(x) L(x, \kappa) dx, \quad (12)$$

где $\chi_\Lambda(x)$ — индикатор куба Λ (возможно сглаженный).

Если имеет место положительность Нельсона—Симанзика, то интеграл в (12) понимается в каком-либо вероятностном смысле: в среднем квадратичном или с вероятностью 1. В остальных случаях удобно вводить норму в \mathfrak{A} так, чтобы $L(x, \kappa)$ был непрерывной функцией от x со значениями в банаховой алгебре \mathfrak{A} . На $G(\mathcal{L})$ это удобно сделать так: ввести антисимметрическое пространство Фока $F_a(\mathcal{L})$ над \mathcal{L} , отождествить $G(\mathcal{L})$ с алгеброй, порожденной операторами рождения $a^*(\Phi)$ в $\mathcal{F}_a(\mathcal{L})$, и положить, например, $\|\psi(\Phi)\| = \|a^*(\Phi)\|$. В действительности, однако, как выяснится далее, способ придания смысла интегралу (12) не очень существенен.

Полезным является решетчатое урезание, когда интеграл (12) заменяется римановой суммой в точках решетки Z_ε^v , а $\kappa(x)$ имеет носитель в окрестности $\left(-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right)^v$.

$$U_{\Lambda, \kappa} = \sum_{x \in Z_e^{\nu}} \chi_{\Lambda}(x) e^{\nu L(x, \kappa)}. \quad (12')$$

При этом производные в лагранжиане заменяются разностями

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} \rightarrow \frac{\xi(x + e) - \xi(x)}{e}.$$

Аксиомы Остервальдера—Шредера. Аксиомы евклидовой квантовой теории поля для функционала $\langle \cdot \rangle$ таковы:

I. Функции Швингера для $\Phi_i \in S(R^{\nu})$, т. е.

$$\langle \xi_{i_1}(\Phi_1) \dots \xi_{i_n}(\Phi_n) \psi_{j_1}(\Phi_{n+1}) \dots \bar{\psi}_{j_m}(\Phi_{n+m}) \rangle,$$

являются умеренными распределениями (т. е. непрерывны в топологии пространства Шварца);

II. Физическая положительность $\langle \cdot \rangle$;

III (Евклидова ковариантность). Обозначим векторы

$$\begin{aligned} \bar{\xi}(x) &= (\bar{\xi}_1(x), \dots, \bar{\xi}_n(x)), & \psi(x) &= \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \vdots \\ \psi_m(x) \end{pmatrix}. \\ \bar{\psi}(x) &= (\bar{\psi}_1(x), \dots, \bar{\psi}_m(x)), \end{aligned}$$

Пусть заданы n -мерное представление $C(g)$ и m -мерное представление $D(g)$ группы вращений евклидова пространства R^{ν} .

Тогда преобразования

$$\bar{\xi}(x) \rightarrow \bar{\xi}(x + a), \quad \psi(x) \rightarrow \psi(x + a), \quad \bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}(x + a),$$

$$\bar{\xi}(x) \rightarrow \bar{\xi}(g^{-1}x)C(g), \quad \psi(x) \rightarrow D(g)\psi(g^{-1}x), \quad \bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}(g^{-1}x)D^{-1}(g)$$

порождают группу автоморфизмов алгебры \mathfrak{A} .

Требуется, чтобы

$$\langle \alpha A \rangle \equiv \langle A \rangle$$

для всех α из этой группы автоморфизмов.

По поводу интересных классов представлений мы отсылаем читателя к другим работам.

Сходимость функционалов. Для построения функционалов, удовлетворяющих всем перечисленным аксиомам, пользуются предельными переходами.

Мы скажем, что последовательность $\langle \cdot \rangle_n$ сходится к $\langle \cdot \rangle$, если имеется сходимость всех функций Швингера. Если имеет место положительность Нельсона—Симанзика, то мы будем требовать больше: слабую сходимость всех конечномерных распределений, т. е. чтобы для всех $\xi(\Phi)$

$$\langle e^{i\xi(\Phi)} \rangle_n \rightarrow \langle e^{i\xi(\Phi)} \rangle.$$

Замечание 2. При доказательстве того, чтобы последовательность мер μ_n сходилась к мере μ , удобно доказывать равномерную сходимость последовательности функций $f_n(\lambda) \equiv \langle \exp i\lambda \xi(\Phi) \rangle_{\mu_n}$ в некоторой окрестности нуля.

Гиббсовские перестройки. Функционал $\langle \cdot \rangle_{\Lambda, \kappa}$ называется гиббсовской перестановкой функционала $\langle \cdot \rangle_0$ (с помощью лагранжиана L), если для всех $A \in \mathfrak{A}$ существует

$$\langle A \rangle_{\Lambda, \kappa} = Z_{\Lambda, \kappa}^{-1} \langle A \exp(-U_{\Lambda, \kappa}) \rangle_0, \quad (13)$$

и если существует

$$Z_{\Lambda, \kappa} \equiv \langle \exp(-U_{\Lambda, \kappa}) \rangle_0 \neq 0, \infty. \quad (14)$$

Если выполнено условие положительности Нельсона—Симанзика, то мы требуем, иными словами, чтобы средние от случайных величин в правых частях (13) и (14) были конечны. Вопрос о том, что значит «продолжить $\langle \cdot \rangle$ на экспоненты» в присутствии фермионов (т. е. $\psi(\varphi)$) каждый раз без труда решается отдельно.

Функциональный интеграл и снятие урезаний. Каждому лагранжиану L соответствует некоторый функционал

$$\langle \cdot \rangle = \lim_{\Lambda \uparrow R^N} \lim_{\kappa} \lim_{\sigma^2 \rightarrow \infty} Z_{\Lambda, \kappa, \sigma^2}^{-1} \langle \cdot \exp(-U_{\Lambda, \kappa}) \rangle_{\sigma^2}, \quad (15)$$

если все эти пределы существуют.

Обсудим эти пределы. Первый предел $\sigma^2 \rightarrow \infty$ соответствует нестрого вводимому в физической литературе функциональному интегралу (переход $\sigma^2 \rightarrow \infty$ соответствует переходу к «несуществующей» лебеговой мере на $(R^N)^{R^V}$).

Часто удобнее этот переход сделать на решетке (по лебеговой мере для бозонов или с помощью интеграла Березина для фермионов).

Если потребовать, чтобы лагранжиан $L(x)$ был инвариантен относительно \mathfrak{H} и всех α , и если, кроме того, χ_{Λ} инвариантна относительно \mathfrak{H} , то можно надеяться при снятии ультрафиолетового урезания $\kappa \rightarrow \delta$ получить OS-положительный функционал, а после снятия объемного урезания $\Lambda \uparrow R^N$ (термодинамический предельный переход) и функционал, удовлетворяющий всем аксиомам.

Квадратичные лагранжианы. Часто бывает так, что $L = L^{(0)} + L^{(1)}$, где $L^{(0)}$ — квадратичный лагранжиан. Тогда удобно воспользоваться следующим свойством транзитивности гиббсовских перестроек:

$$\langle A \rangle \equiv Z^{-1} \langle A \exp(-U^{(0)} - U^{(1)}) \rangle_0 = \frac{\langle A \exp(-U^{(1)}) \rangle_{U^{(0)}}}{\langle \exp(-U^{(1)}) \rangle_{U^{(0)}}},$$

где

$$\langle \cdot \rangle_{U^{(0)}} = \frac{\langle \cdot \exp(-U^{(0)}) \rangle_0}{\langle \exp(-U^{(0)}) \rangle_0},$$

если все знаменатели отличны от нуля. Это свойство транзитивности выполнено, если $\exp(-U^{(0)} - U^{(1)}) = \exp(-U^{(0)}) \exp(-U^{(1)})$.

Это справедливо, если каждый моном в лагранжиане четен относительно грассмановых переменных, что далее всегда предполагается.

Следующее утверждение очевидно.

Утверждение 1. Предел гауссовских функционалов может быть только гауссовым. Перестройка гауссова функционала с помощью квадратичного лагранжиана (без линейных членов) может быть только гауссовой, если она существует.

Опыт показывает, что удобно построить сначала гауссов функционал, удовлетворяющий аксиомам Остервальдера—Шредера, а затем его перестройку неквадратичным лагранжианом.

Важнейшими примерами гауссовых функционалов являются свободное скалярное поле и поле Дирака.

Свободное скалярное поле. Рассмотрим обобщенное гауссово поле $\xi(\varphi)$ на R^v с

$$\langle \xi(\varphi) \rangle = 0, \quad \langle \xi(\varphi) \xi(\varphi') \rangle = \int_{R^v} \frac{\tilde{\varphi}(k) \overline{\tilde{\varphi}'(k)} dk}{(k^2 + m^2)^{1+\varepsilon}}, \quad (16)$$

где

$$\tilde{\varphi}(k) = (2\pi)^{-\frac{v}{2}} \int_{R^v} \exp(i(k, x)) \varphi(x) dx,$$

$$k = (k^1, \dots, k^v), \quad (k, x) = k^1 x^1 + \dots + k^v x^v, \quad k^2 = (k^1)^2 + \dots + (k^v)^2.$$

При $\varepsilon = 0$ это поле удовлетворяет аксиомам Остервальдера—Шредера и называется свободным скалярным полем.

Оно соответствует лагранжиану $m^2 \xi^2(x) + (\nabla \xi(x))^2$.

Поле Дирака. Нам понадобятся двумерное и четырехмерное поле Дирака. Поле Дирака на R^v ($v = 2, 4$), $x = (x^0, \dots, x^{v-1})$ состоит из $2v$ компонент (x^0 здесь играет роль x^v),

$$\bar{\psi}(x) = (\bar{\psi}^1(x), \dots, \bar{\psi}^v(x)), \quad \psi(x) = \begin{pmatrix} \psi^1(x) \\ \vdots \\ \psi^v(x) \end{pmatrix}.$$

Его лагранжиан имеет вид

$$L(x) = m \bar{\psi}(x) \psi(x) + \frac{1}{2} \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \partial_\mu \psi(x) - \frac{1}{2} \partial_\mu \bar{\psi}(x) \dot{\gamma}_\mu \psi(x) \quad (16')$$

или

$$\int L(x) dx = \int m \bar{\psi} \psi dx + \int \bar{\psi} \gamma_\mu \partial_\mu \psi dx,$$

где $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$, по $\mu = 0, \dots, v-1$ ведется суммирование. Евклидовы матрицы Дирака самосопряжены и удовлетворяют соотношениям

$$\gamma_\mu \gamma_{\mu'} + \gamma_{\mu'} \gamma_\mu = 2\delta_{\mu\mu'}$$

и могут быть выбраны, например, в виде

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{при } \nu=2;$$

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma_j = i \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ -\sigma_j & 0 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{при } \nu=4.$$

Удобно определить поле Дирака как предел решетчатой аппроксимации с периодическими граничными условиями в конечном объеме Λ

$$\langle A \rangle = \lim_{\Lambda \uparrow R^\nu} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} Z_\Lambda^{-1} \langle A \exp \left(- \sum_{x \in \Lambda \cap Z_\varepsilon^\nu} \varepsilon^\nu L(x) \right) \rangle_B, \quad (16'')$$

где $\langle \cdot \rangle_B$ — интеграл Березина и A — моном по полям.

Преобразование Фурье матричного ядра квадратичной формы в экспоненте (16'') в пределе $\varepsilon \rightarrow 0$ имеет вид

$$m - i\gamma_\mu p^\mu \stackrel{\text{def}}{=} m - i\rlap{/}p.$$

Используя свойства интеграла Березина, а также равенство

$$(m + i\rlap{/}p)(m - i\rlap{/}p) \equiv (m - i\rlap{/}p)(m + i\rlap{/}p) = m^2 + p^2,$$

нетрудно доказать, что

$$\langle \psi^\alpha(x) \bar{\psi}^\beta(y) \rangle = \text{const} \int e^{-i\rho(x-y)} \frac{(m + i\rlap{/}p)^{\alpha\beta}}{m^2 + p^2} d^\nu p. \quad (16''')$$

Из вида (16') подбирается инволюция ϑ , чтобы обеспечить OS-положительность. Например, при $\nu=2$ $\vartheta\psi_1(x) = \bar{\psi}_2(x)$, $\vartheta\psi_2(x) = \bar{\psi}_1(x)$ и т. д.

Мы не будем в настоящей статье заниматься вопросами евклидовой инвариантности.

Формальная теория возмущений. Пусть даны гауссов функционал $\langle \cdot \rangle_0$ и евклидово действие $U = U_{\Lambda, \kappa}$. Рассмотрим формальные ряды по λ

$$\begin{aligned} \langle A \rangle_{\Lambda, \kappa} &= Z_{\Lambda, \kappa}^{-1} \langle A \exp(-\lambda U) \rangle_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^n}{n!} \langle A, U^n \rangle_0 = \\ &= \sum c_n(A) \lambda^n, \\ Z_{\Lambda, \kappa} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^n}{n!} \langle U^n \rangle_0 = \sum a_n \lambda^n, \\ \ln Z_{\Lambda, \kappa} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\lambda)^n}{n!} \langle U^n \rangle_0 = \sum b_n \lambda^n. \end{aligned} \quad (17)$$

Как правило, при $\kappa \rightarrow \delta$ предел каждого члена этих рядов бесконечен. Цель формальной теории перенормировок — дать рецепт переопределения (перенормировки) лагранжиана L так, чтобы каждый член формального ряда по λ стал конечным при замене L на $L^{ren}(\lambda)$ (многочлен или формальный ряд по λ). Его коэффициенты являются многочленами от $\xi_\kappa(x)$, $\psi_\kappa(x)$, но уже с коэффициентами, зависящими от x , Λ , κ .

Имеется формулировка аксиом евклидовой теории для таких формальных рядов [116]. Процедура перенормировки рассматривается в § 3.

Нам понадобится форма остаточных членов в (17). Например,

$$\ln Z_{\Lambda, \kappa} = \sum_{n=1}^N \frac{(-\lambda)^n}{n!} \langle U^n \rangle_0 + \frac{(-\lambda)^{N+1}}{(N+1)!} \langle U^{N+1} \rangle_{\lambda'}, \quad (18)$$

где

$$\langle \cdot \rangle_{\lambda'} = \frac{\langle \cdot \exp(-\lambda' U) \rangle_0}{\langle \exp(-\lambda' U) \rangle_0}, \quad 0 \leq \lambda' \leq \lambda.$$

§ 2. Элементы диаграмматики

Здесь собраны элементарные понятия во многом на примере скалярного поля, связанные с оценками диаграмм, многие из которых нелегко отыскать в литературе.

Сингулярности. Двухчастичная функция Швингера поля (16.1) может быть записана в виде

$$\langle \xi(\Phi_1) \xi(\Phi_2) \rangle = \int C(x_1 - x_2) \Phi(x_1) \Phi(x_2) dx_1 dx_2,$$

где

$$C(x) = (2\pi)^{-\nu} \int_{R^\nu} \frac{\exp[i(k, x_1 - x_2)] dk}{(k^2 + m^2)^{1+\varepsilon}}. \quad (1)$$

Лемма 1. Обобщенная функция умеренного роста $C(x)$ имеет следующие свойства при $\varepsilon = 0$:

(i) $C(x)$ — изотропная положительная аналитическая функция при $x \neq 0$ [8];

(ii) (сингулярность в нуле) при $|x| \rightarrow 0$

$$C(x) \rightarrow \langle \xi^2(0) \rangle > \infty, \quad \text{если } \nu = 1,$$

$$C(x) + (2\pi)^{-1} \ln x \rightarrow \text{const}, \quad \text{если } \nu = 2.$$

При $\varepsilon \geq 0$ и $\nu - 2(1 + \varepsilon) > 0$

$$C(x) \sim \frac{C}{|x|^{\nu - 2(1 + \varepsilon)}}. \quad (2)$$

Нам в основном понадобится только (2), которое доказывается заменой (скейлингом) $k = k' / |x|$:

$$C(x) = (2\pi)^{-\nu} \frac{1}{|x|^{\nu-2(1+\varepsilon)}} \int \frac{\exp \left[i \left(k', \frac{x}{|x|} \right) \right] dk'}{((k')^2 + |x|^2 m^2)^{1+\varepsilon}}.$$

Последний интеграл по области $|k'| \leq 1$ абсолютно сходится, в остальной области в его существовании можно убедиться интегрированием по частям.

Диаграммы. Диаграммой G будем называть множество $V = \{1, \dots, n\}$ (занумерованных вершин) и набор L упорядоченных пар вершин (ребра). Каждой вершине i ставится в соответствие точка $x_i \in R^\nu$, каждому ребру $l = (i(l), j(l))$ — «пропатор» $C_l(x_{i(l)} - x_{j(l)})$. Мы считаем C_l ограниченной вне произвольной окрестности нуля. В этой главе C_l всегда четна. Диаграмме G ставится в соответствие функция

$$G(x_1, \dots, x_n) = \prod_l C_l(x_{i(l)} - x_{j(l)}), \quad (3)$$

определенная при $x_i \neq x_j$.

Поддиаграммой диаграммы G будем называть произвольное множество ребер $L' \subset L$ вместе со всеми инцидентными им вершинами. Для подмножества вершин $V' \subset V$ определим поддиаграмму $G(V')$, состоящую из всех ребер с обоими концами в V' . Поддиаграмма называется собственной, если она имеет вид $G(V')$ для некоторого V' и является связной и одночастично неприводимой (1 чн), т. е. при откидывании любого ребра она остается связной. Если заданы непересекающиеся множества вершин V_1, \dots, V_k , то факторграф $G/\{V_1, \dots, V_k\}$ определяется «стягиванием» всех ребер и вершин каждой $G(V_i)$ в одну точку.

Теорема 1 (ультрафиолетовая теорема счета степеней). Пусть при $|x| \rightarrow 0$ и $|k| \rightarrow \infty$

$$C_l(x) \sim \frac{c}{|x|^{\nu-\alpha_l}}, \quad \tilde{C}_l(k) \sim \frac{c}{|k|^{\alpha_l}}, \quad 0 < \alpha_l < \nu \quad (4)$$

(при довольно слабых предположениях из одного этого условия следует другое).

Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1) $G(x_1, \dots, x_n)$ локально интегрируема, т. е. для любых ограниченных $g_\nu(x_\nu)$ с компактными носителями интеграл

$$\int G(x_1, \dots, x_n) \prod_{\nu \in V} g_\nu(x_\nu) dx_\nu \quad (5)$$

конечен.

2) Для любого $V' \subset V$ ($G' = G(V')$)

$$\omega_{G'} \stackrel{\text{def}}{=} - \sum_{l \in L'} \alpha_l \pm \nu (|L'| - |V'| + 1), \quad (6)$$

где L', V' — множества ребер и вершин G' .

3) Для любой собственной G' имеет место (6).

4) Для любой G' имеет место (6).

Доказательство. Доказательство $1 \rightarrow 2$ чрезвычайно просто и демонстрирует суть дела. Пусть $V' = \{1, \dots, k\}$. Фиксируем точки x_1 и x_{k+1}, \dots, x_n и будем интегрировать по x_2, \dots, x_k в малой окрестности O точки x_1 . Пусть при этом каждая из переменных x_2, \dots, x_k независимо пробегает некоторый «сектор» так, что для некоторого $\varepsilon > 0$

$$\frac{\varepsilon}{2} < |x_1 - x_j| < \varepsilon, \quad C_2 \varepsilon \geq |x_i - x_j| \geq C_1 \varepsilon,$$

$i, j = 2, \dots, k$. Тогда для достаточно малого ε интеграл оценивается снизу величиной

$$\text{const } \varepsilon^{\nu(k-1)} e^{-\sum_{l \in L'} (\nu - \alpha_l)}$$

откуда следует утверждение (счет степеней). Достаточность доказывается чуть сложнее (простейший способ см. в [6], см. также ниже). Остальное очевидно ввиду того, что $\nu - \alpha_l \geq 0$.

k -представление диаграмм. Если (3) является обобщенной функцией, то ее можно представить в виде

$$\begin{aligned} G(x_1, \dots, x_n) &= \text{const} \int \prod_l \tilde{C}_l(k_l) e^{i(k_l, x_{1(l)} - x_{j(l)})} dk_l = \\ &= \text{const} \int \prod_l \tilde{C}_l(k_l) dk_l \prod_v e^{i(x_v, \sum_l r_{vl} k_l)}, \end{aligned} \quad (7)$$

где в матрице инцидентности $r_{vl} = 1$, если ребро l входит в v , $r_{vl} = -1$, если выходит, и $r_{vl} = 0$, если v и l не инцидентны. При этом направления бозонных ребер выбираются произвольно, а «фермионных» условимся выбирать «от $\bar{\psi}$ к ψ ». Тогда

$$\begin{aligned} \tilde{G}(q_1, \dots, q_n) &= \text{const} \int \prod_l \tilde{C}_l(k_l) dk_l \prod_v \delta\left(q_v + \sum_l r_{vl} k_l\right), \\ &\int G(x_1, \dots, x_n) \prod_v g_v(x_v) dx_v = \\ &= \text{const} \int \prod_l \tilde{C}_l(k_l) dk_l \prod_v \tilde{g}_v\left(\sum_l r_{vl} k_l\right). \end{aligned}$$

Назовем k_l импульсом ребра l , q_v импульсом вершины v . Обозначим через $M_v(q_v)$ плоскость $q_v + \sum_l r_{vl} k_l = 0$ в пространстве $R^{\nu L}$, пусть $M = \bigcap_v M_v$, $M_v = M_v(0)$. Тогда M есть группа циклов

(или гомологий) на G со значениями в R^ν , поэтому

$$\begin{aligned} \dim M &= \dim H_1(G, R^\nu) = \nu \dim H_1(G, Z_2) \equiv \\ &\equiv \nu |C| = \nu (|L| - |V| + |K|), \end{aligned}$$

где C — некоторое множество линейно независимых циклов по mod 2 (каждый такой цикл может быть отождествлен с соответствующим подмножеством — замкнутым путем в L), K — множество компонент связности G .

Каждому циклу $c \in C$ поставим в соответствие число λ_c ; пусть матрица δ_{lc} такова, что $\delta_{lc} = \pm 1$, если $l \in c$ и направления l и c совпадают (не совпадают), $\delta_{lc} = 0$, если $l \notin c$. При этом направления циклов выбираются произвольно. Тогда сходимость (5) эквивалентна сходимости интеграла

$$\int \prod_{M \setminus I} \tilde{C}(k_i) dk_i = \text{const} \int \prod_I \tilde{C}_l \left(\sum_c \delta_{lc} \lambda_c \right) \prod_c d\lambda_c. \quad (7')$$

Пусть \mathcal{L} — система плоскостей, являющихся пересечением некоторого числа плоскостей $k_i = 0$ в $M = R^{vc}$. Пусть $L \subset \mathcal{L}$ и $L_\varepsilon \subset L$ — объединение множества лучей из 0 в ∞ в L , имеющих угол $> \varepsilon$ с каждой из плоскостей $L' \subset L$, $L' \neq L$, $L' \in \mathcal{L}$.

Двойственный метод оценки интеграла (7) по L_ε ведет к другому эквивалентному условию в теореме 1.

5) Для всех L

$$\omega_L \stackrel{\text{def}}{=} \dim L - \sum_{l: L \cap \{k_l=0\}} \alpha_l < 0. \quad (8)$$

Нетрудно доказать эквивалентность 5) остальным условиям теоремы 1.

Асимптотика по урезанию. Пусть каждая $\tilde{C}_l(k_i)$ заменена на $\tilde{C}_l(k_i) \chi_{\{|k_i| < \kappa\}}$.

Теорема 2. Асимптотика интеграла (5) при $\kappa \rightarrow \infty$ имеет вид

$$(5) \sim \text{const} \kappa^\rho \ln^m \kappa. \quad (9)$$

При этом пара (ρ, m) определяется следующим образом. Рассмотрим произвольные связанные поддиаграммы G_1, \dots, G_k с $\omega_{G_i} \geq 0$, не имеющие общих вершин. Для заданных G_1, \dots, G_k определим $\tilde{\rho} = \sum_i \omega_{G_i}$, \tilde{m} — число G_i таких, что $\omega_{G_i} = 0$. Тогда (ρ, m) есть максимум из $(0, 0)$ и всех таких $(\tilde{\rho}, \tilde{m})$ в смысле следующего частичного порядка $(\tilde{\rho}_1, \tilde{m}_1) < (\tilde{\rho}_2, \tilde{m}_2)$, если либо $\tilde{\rho}_1 < \tilde{\rho}_2$, либо $\tilde{\rho}_1 = \tilde{\rho}_2$ и $\tilde{m}_1 < \tilde{m}_2$. Есть простое доказательство, но ниже дается стандартное.

α -представление. Это представление диаграмм используется чрезвычайно широко, и мы его приводим для полноты.

Пусть $V = \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$. Рассмотрим представление

$$\frac{1}{(k^2 + m^2)^{1+\varepsilon}} = \frac{1}{\Gamma(1+\varepsilon)} \int_0^\infty \alpha^\varepsilon e^{-\alpha(k^2 + m^2)} d\alpha. \quad (10)$$

Для $\varepsilon=0$ это очевидно, а в общем случае следует из определения Γ -функции. Полагая $x_{v_0}=0$ и $q_{v_0}=-q_{v_1}-\dots-q_{v_n}$, рассмотрим преобразование Фурье $G(0, x_1, \dots, x_n)$,

$$\tilde{G}(q_1, \dots, q_n) = \text{const} \int \exp \left(i \sum_{v \neq v_0} (q_v, x_v) + i \sum_{v,l} r_{vl} (x_v, k_l) - \sum_l \alpha_l (k_l^2 + m^2) \right) \prod_l \chi(\alpha_l) dx d\vec{k} d\vec{\alpha}, \quad (11)$$

где в нашем случае $\chi(\alpha) = \alpha^\varepsilon$. Проинтегрируем в (11) по $d\vec{x} d\vec{k} d\vec{\alpha}$, воспользовавшись формулой

$$\int \exp \left[i(t, y) - \frac{1}{2}(Qy, y) \right] dy = (2\pi)^{\frac{v}{2}(L+v)} (\det Q)^{-\frac{v}{2}} \times \exp \left(-\frac{1}{2}(Q^{-1}t, t) \right). \quad (12)$$

Для этого рассмотрим квадратичную форму

$$Q = -2i \sum_{v,l} r_{vl} (k_l, x_v) + 2 \sum_l \alpha_l k_l^2$$

и соответствующую симметрическую матрицу

$$Q = \left\| \begin{array}{cc|cc} 2\alpha_l & 0 & -ir_{vl} & \\ 0 & 2\alpha_l & & \\ \hline -ir_{vl} & & 0 & \end{array} \right\|.$$

Заметим, что определители вида $\left| \begin{array}{c|c} 0 & A \\ \hline B & 0 \end{array} \right| \neq 0$, если только A и B — квадратные матрицы. В этом случае они равны $(-1)^E \det A \times \det B$, где E — ранг A (или B). Но этот множитель сократится в нашем случае с i^{2E} . Поэтому

$$\det Q = \prod_{L' \subset L} \left(\prod_{i \in L'} 2\alpha_i \right) [\det (r_{vl})_{V', L'}]^2,$$

где V' — множество всех вершин без v_0 .

Лемма 1.

$$\det (r_{vl})_{V', L'} = \begin{cases} \pm 1, & \text{если } L' \text{ есть 1-дерево;} \\ 0, & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

т. е.

$$\det Q = \sum_{L'} \prod_{i \in L'} 2\alpha_i,$$

где сумма по всем 1-деревам, т. е. по связным деревьям с $n+1$ вершиной.

Доказательство. Каждый член $\det Q$ определяется взаимнооднозначным отображением $\Phi: V' \leftrightarrow L'$. Именно

$$\det Q = \sum (-1)^{\alpha} \prod_{v \in V'} r_{v, \Phi(v)}.$$

Если в L' нет циклов, то в этой сумме ровно один член: существует вершина v , инцидентная только одному l , полагаем $\Phi(v) = l$ и т. д. Если же есть циклы, то $\det = 0$. Действительно, рассмотрим некоторый цикл l_1, \dots, l_k . Пусть v_1, \dots, v_k — вершины этого цикла: v_1 и v_2 инцидентны l_1 , v_2 и v_3 — l_2 и т. д. Есть только два отображения $\Phi: \{v_1, \dots, v_k\} \rightarrow \{l_1, \dots, l_k\}$ при фиксированных остальных $\Phi(v)$. Именно $\Phi(v_1) = l_1$ или l_2 и т. д. Две подстановки $\begin{pmatrix} v_1 \dots v_k \\ l_1 \dots l_k \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} v_1 \dots v_k \\ l_2 l_1 \dots l_{k-1} \end{pmatrix}$ отличаются знаком $(-1)^{k-1}$, а соответствующие члены $\det Q$ за счет замены $r_{v_l} \rightarrow -r_{v_l}$ отличаются знаком $(-1)^k$. Поэтому сумма их всегда 0. Отсюда следует лемма 1.

Рассмотрим теперь минор $Q_{vv'}$ с вычеркнутыми строкой v и столбцом v' . Тогда

$$\det Q_{vv'} = \sum_{l \in L'} 2\alpha_l,$$

где сумма берется по всем 2-деревьям L'' , т. е. деревьям, содержащим все вершины и состоящим из двух связных компонент L_1'' , содержащей v_0 , и L_2'' , содержащей v и v' .

Доказательство совершенно аналогично предыдущему.

Обозначим $p_{L'} = \sum q_v$, где сумма по v , принадлежащим одной из компонент 2-дерева L'' (любой в силу того, что $q_{v_0} + \dots + q_{v_n} = 0$).

Лемма 2. Интеграл (11) равен

$$\text{const} \frac{1}{\left(\sum_{L'} \prod_{l \in L'} \alpha_l \right)^{v/2}} \exp \left(- \frac{\sum_{L'} p_{L'}^2 \sum_{l \in L'} \alpha_l}{\sum_{L'} \prod_{l \in L'} \alpha_l} \right). \quad (13)$$

Нетрудно доказать, что знаки алгебраических дополнений согласуются с формулой (13).

Секторы Хеша. Вся область интегрирования R^L по α_l разбивается на $L!$ секторов: $\alpha_{i_1} \leq \alpha_{i_2} \leq \dots \leq \alpha_{i_L}$. В каждом секторе, например, $\alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_L$ можно сделать замену переменных

$$t_1 = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}, \dots, t_{L-1} = \frac{\alpha_{L-1}}{\alpha_L}, \quad t_L = \alpha_L,$$

$$0 \leq t_1 \leq 1, \dots, 0 \leq t_{L-1} \leq 1, \quad 0 \leq t_L < \infty. \quad (14)$$

Обратная замена имеет вид

$$\alpha_l = t_1 t_{1+1} \dots t_L.$$

Якобиан является определителем треугольной матрицы и равен

$$J = \det \left\| \frac{\partial \alpha_i}{\partial t_j} \right\| = \prod_{i=1}^L t_i^{l_i-1}.$$

Поэтому $\prod_{i \in \bar{L}'} \alpha_i = \prod_{i=1}^L t_i^{\beta_i'}$, где $\beta_i' = \beta_i(L') = |\{1, \dots, l\} \cap (L-L')| = |\{1, \dots, l\} \setminus L'|$.

Интеграл

$$\int G(0, x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \tilde{G}(0, 0, \dots, 0) = \text{const} (\det Q)^{-\nu/2}. \quad (15)$$

Лемма 3. Для заданного сектора существует 1-дерево L_0 такое, что $\beta_i(L_0) \stackrel{\text{def}}{=} \beta_i^0 \leq \beta_i \stackrel{\text{def}}{=} \beta_i(L')$ для всех l и для всех 1-деревьев L' . При этом для любого L' существует $l = l(L')$ такое, что $\beta_l^0 < \beta_l$.

Доказательство. Построим такое 1-дерево. Выберем $l_1 = 1$, l_2 — первое ребро из оставшихся ребер, не образующее цикла с l_1 и т. д., l_k — первое из оставшихся ребер, не образующее цикла с $\{l_1, \dots, l_{k-1}\}$. Из построения ясно, что $L_0 \cap \{1, \dots, l\}$ есть дерево с максимальным числом ребер, которое можно вложить в граф G_l , состоящий из ребер $\{1, \dots, l\}$ и всех инцидентных им вершин. Пусть число этих вершин есть V_l , а число компонент связности G_l равно K_l .

Тогда

$$\beta_l^0 = l - V_l + K_l.$$

Отсюда следует первая часть утверждения. Для доказательства последнего надо взять первое l такое, что

$$L' \cap \{1, \dots, l\} \neq L_0 \cap \{1, \dots, l\}.$$

Отсюда получаем

$$\det Q = \prod_l t_l^{\beta_l^0} (1+P),$$

где P — полином с положительными коэффициентами от t_l . Интеграл тогда переписывается в виде

$$\text{const} \int (1+P)^{-\nu/2} \prod_l t_l^{-\frac{\nu}{2} \beta_l^0 + l \varepsilon + l - 1} \quad (16)$$

и мы получили факторизацию сингулярной части интеграла. Отсюда легко следует теорема счета степеней и асимптотика по

урезанию $\alpha_0 = \kappa^{-2}$, т. е. асимптотика интеграла $\prod_l \int_{\alpha_0}^{\infty} d\alpha_l$.

Виковские точки и петли в диаграммах. В случае полиномиального лагранжиана в разложении (17.1) каждого члена по диаграммам в некоторых диаграммах есть петли (т. е. ребра вида (x, x)), что дает множители $\langle \xi_x^2(x) \rangle$, т. е. дисперсии. Если, например, $\tilde{\eta} = \chi(k: |k| \leq \kappa)$, то при $\nu - 2(1 + \varepsilon) > 0$

$$\langle \xi_x^2(x) \rangle = \int_{|k| < \kappa} \frac{dk}{(k^2 + m^2)^{1+\varepsilon}} \sim C\kappa^{\nu-2(1+\varepsilon)}, \quad (17)$$

и нельзя надеяться на конечность членов при снятии ультрафиолетового обрезания.

Стандартный прием перенормировки лагранжиана, чтобы каждый член разлагался в сумму диаграмм без петель, состоит в замене каждого монома, например, $\xi_x^4(x)$ на виковский моном

$$:\xi_x^4(x): = \xi_x^4(x) - 6 \langle \xi_x^2(x) \rangle \xi_x^2(x) + 3 \langle \xi_x^2(x) \rangle^2. \quad (18)$$

Техника виковских мономов и разложение по диаграммам моментов и семиинвариантов см. в книге [7].

Для урезанного поля конечность гиббсовской перестройки следует из оценки Вика, например,

$$:\xi_x^4(x): = (\xi_x^2 - 3 \langle \xi_x^2 \rangle)^2 - 6 \langle \xi_x^2 \rangle^2 \geq -6 \langle \xi_x^2(x) \rangle^2.$$

Поэтому из-за ограниченности $U_\Lambda = \lambda \int_\Lambda :\xi_x^4(x): dx$ снизу $\langle \exp(-U_\Lambda) \rangle_0 < \infty$. Для фермионов определим виковские мономы по индукции относительно состояния $\langle \cdot \rangle$ на грассмановой алгебре

$$\psi_1 \dots \psi_n = \sum_T \psi_T: \langle \psi_{i_1} \psi_{j_1} \rangle \dots \langle \psi_{i_p} \psi_{j_p} \rangle (-1)^\pi, \quad (19)$$

где $T = (k_1, \dots, k_s)$, $k_1 < \dots < k_s$, $\psi_T = \psi_{k_1} \dots \psi_{k_s}$, сумма берется по всем $T \subset (1, 2, \dots, n)$ и всем разбиениям $(1, 2, \dots, n) \setminus T$ на пары $i_r < j_r$; π — четность подстановки

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & j_1 & i_p & j_p & k_1 & \dots & k_s \end{pmatrix}.$$

Все свойства виковских мономов переносятся на этот случай с учетом правила знаков.

Классификация моделей. Рассмотрим диаграммы G , возникающие в рядах (17.1) для лагранжиана $:\Phi^n(x):$ и «пропагатора» (16.1). В разложении (m и $|V|$ любые)

$$\langle \Phi(y_1), \dots, \Phi(y_m), :\Phi^n(x_1):, \dots, :\Phi^n(x_{|V|}): \rangle$$

рассмотрим всевозможные диаграммы G и их поддиаграммы G' . Ребро l назовем внешним для поддиаграммы G' , если оно не принадлежит G' , но инцидентно некоторой вершине G' . Тогда

$$L' = \frac{nV' - b}{2},$$

где L' , V' — число «внутренних» ребер и вершин G' , b — число внешних ребер. Поэтому

$$\begin{aligned} \omega_{G'} &= \nu(1 + L' - V') - 2(1 + \varepsilon)L' = \nu + \\ &+ V' \left(\frac{\nu n}{2} - \nu - n \right) + b \left(1 - \frac{\nu}{2} \right) - \varepsilon(V'n - b). \end{aligned} \quad (20)$$

При $n=4$, $\nu=4$ (так называемая модель $:\Phi^4_{:4,\varepsilon}$)

$$\omega_{G'} = 4 - b - \varepsilon(4V' - b). \quad (21)$$

В формальной теории возмущений принята классификация: при $\varepsilon > 0$ модель сверхперенормируема (т. е. лишь конечное число поддиаграмм G' «примитивно расходится», т. е. $\omega_{G'} \geq 0$). При $\varepsilon = 0$ модель перенормируема (но не сверхперенормируема) (т. е. при $b > 4$ всегда $\omega_{G'} < 0$). Для всех собственных G' с $b=0, 2, 4$ $\omega_{G'} \geq 0$. При $\varepsilon < 0$ модель неперенормируема.

Инфракрасные расходимости. Пусть теперь

$$C_l(x) \sim \frac{C}{|x|^{\nu-\beta_l}}, \quad \tilde{C}_l(k) \sim \frac{C}{|k|^{\beta_l}}, \quad 0 \leq \beta_l < \nu,$$

и эти функции ограничены в окрестности любой точки, кроме $k=0$. Будем считать $V = \{0, 1, \dots, n\}$ и точка $x_0 \equiv 0$ фиксирована.

Рассмотрим интеграл

$$\int \prod_l C_l(x_{l(i)} - x_{j(i)}) dx_1 \dots dx_n. \quad (22)$$

Теорема 3 (инфракрасная теорема счета степеней). Следующие утверждения эквивалентны:

- 1) интеграл (22) абсолютно сходится;
- 2)

$$\omega_{G/\alpha} = - \sum_{l \in G/\alpha} \beta_l + \nu(L - V + 1) > 0. \quad (23)$$

для любого разбиения $\alpha = \{V_1, \dots, V_k\}$ множество вершин, определяющего связный факторграф $G/\alpha = G/\{G(V_1), \dots, G(V_k)\}$, L , V — число ребер и вершин в этом факторграфе.

- 3) связность в п. 2 можно заменить на 1 чн.

Доказательство. Из 1 следует 2 так же, как в теореме 1. Точнее: пусть $x_0 \in V_1$, тогда будем считать, что другие точки из V_1 принадлежат заданной окрестности начала координат, а точки V_2, \dots, V_k будем устремлять к ∞ так, что $\text{diam } V_i \leq \leq \text{const}$ и $C_1 R \leq \rho(V_i, V_j) \leq C_2 R$, $R \rightarrow \infty$.

Интегрируя далее по R , получим условие (23). Далее так же, как в теореме 1. Однако мы получим доказательство сведением ж ультрафиолетовому случаю.

Рассмотрим следующее инфракрасное урезание:

$$\tilde{C}_\kappa(k) = \frac{C}{\left(\frac{m^2}{\kappa^2} + k^2\right)^{\beta_l/2}}, \text{ при } |k| \leq 1.$$

Делая замену $k_l = \frac{k'_l}{\kappa}$ в интервале (7), имеем

$$G(x_1, \dots, x_n) = \text{const } \kappa^{2\beta_l - \nu L} \times \\ \times \int_0^\infty \prod_l \frac{1}{(m^2 + k'_l)^{\beta_l/2}} \exp \left[i \left(k'_l, \frac{x_{l(l)} - x_{j(l)}}{\kappa} \right) \right] dk'_l$$

и, делая замену $\frac{x}{\kappa} = y$, имеем

$$\int G(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \text{const } \kappa^{2\beta_l - \nu L + \nu n} \times \\ \times \int_0^\kappa \prod_l \frac{1}{(m^2 + k_l)^{\beta_l/2}} \exp [i(k_l, x_{l(l)} - x_{j(l)})] dk_l.$$

Асимптотика последнего интеграла нам известна из теоремы 2. Подставляя (9), получаем $\text{const } \kappa^{2\beta_l - \nu L + \nu n + \rho} \ln^m \kappa$.

Теорема 4. Для связанных G асимптотика при $\kappa \rightarrow \infty$ интеграла (22) имеет вид $C \kappa^{\rho'} \ln^m \kappa$, где $\rho' = \max(-\omega_{G/\alpha}, 0)$, а число m определено выше.

Доказательство. Если $\rho \geq 0$, то

$$\begin{aligned} \rho' &= \Sigma \beta_l - \nu L + \nu n + \rho = \Sigma \beta_l - \nu C + \rho = \\ &= -\omega_G + \Sigma \omega_{G_l} = \Sigma \beta_l - \sum_l \sum_{i \in G_l} \beta_l - \nu C + \nu \sum_l C(G_l) = \\ &= \sum_{i \in G/\alpha} \beta_l - \nu C(G/\alpha) = -\omega_{G/\alpha}. \end{aligned}$$

Если $\rho < 0$, то $\rho' = \Sigma \beta_l - \nu C = -\omega_G$. Отсюда, в частности, следует и теорема 3.

§ 3. Формальные перенормировки в ультрафиолетовой области

Здесь кратко изложена классическая теория формальных перенормировок в евклидовой области (см. [4]).

Диаграммы — случайные величины. Мы будем теперь рассматривать диаграммы более общего вида. Такая диаграмма G будет состоять из множества занумерованных вершин $\{1, \dots, n\}$, ребер L и «свободных» отростков E . Каждому отростку $r \in E$ сопоставлена вершина $i(r)$, из которой этот отросток выходит. Каждой вершине v сопоставляется точка $x_v \in R^v$, ребру — $C_l(x_{i(l)} - x_{j(l)})$, отростку r — случайная величина $\xi^{(r)}(x_{i(r)})$,

точнее случайное поле $\xi(x)$ в точке $x_{i(r)}$ с некоторым обрезанием, зависящим от r . Положим

$$G(x_1, \dots, x_n) = \left[\prod_l C_l(x_{i(l)} - x_{j(l)}) \right] : \prod_r \xi^{(r)}(x_{i(r)}): \quad (1)$$

$$I_G = \int G(x_1, \dots, x_n) \prod_{v=1}^n g_v(x_v) dx_v$$

для некоторых g_v .

Алгебра диаграмм. Пусть \mathcal{L}_n — линейное пространство, натянутое на все такие случайные функции $G(x_1, \dots, x_n)$ от n переменных при фиксированном n , \mathcal{L}_0 — константы. Рассмотрим прямую сумму $\mathcal{L} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}_n$, т. е. бесконечные наборы (L_0, L_1, \dots) элементов $L_i \in \mathcal{L}_i$. Превратим \mathcal{L} в алгебру, вводя произведение

$$G_1 * G_2 = (G_1 * G_2)(x_1, \dots, x_{n+m}) \in \mathcal{L}_{n+m},$$

где $G(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{L}_n$, $G_2(x_{n+1}, \dots, x_{n+m}) \in \mathcal{L}_m$. Для этого рассмотрим случайную величину $G_1 G_2$ при фиксированных x_i и разложим ее по мономам Вика. При этом разложении мы используем известное правило [6]: произведение двух диаграмм (изображающих мономы Вика) есть сумма диаграмм, полученных из несвязного объединения этих двух диаграмм всевозможными спариваниями некоторого числа (возможно пустого) отростков из разных диаграмм. Тогда для любого $S \in Z$ имеет смысл

$$e^S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S * \dots * S}{n!} \in \mathcal{L}.$$

Замечание 1. Удобно не фиксировать класс «пропагаторов» и полей в определении алгебры \mathcal{L} . Как правило, он будет ясен из контекста.

Алгебра операций над диаграммами. *M*-операция. Рассмотрим сначала связную диаграмму G с $E = \emptyset$. Пусть $V = \{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, n\}$, $i_1 < \dots < i_k$. Тогда можно записать

$$G(x_1, \dots, x_n) = \prod_l' C_l(x_{i(l)} - x_{j(l)}) \prod_l'' C_l(x_{i(l)} - x_{j(l)}), \quad (2)$$

где в \prod_l' произведение по всем ребрам l таким, что одна из вершин l (например, $j(l)$) не принадлежит V , а вторая ($i(l)$) совпадает с одной из вершин i_1, \dots, i_k ; в \prod_l'' — по остальным ребрам.

Определим операцию $M(V)$. Положим

$$M(V)G = 0,$$

если

либо 1) $\omega(V) < 0$,

либо 2) $|V|=1$, (3)

либо 3) $G(V)$ не является 1 чн (в частности, если $G(V)$ несвязна).

Если $V = \{1, \dots, n\}$, то положим $M(V)G = G$, если $n \geq 2$ и $\omega_G \geq 0$.

В остальных случаях положим

$$M(V)G(x_1, \dots, x_n) = T(x_1, \dots, x_n) \prod_l C_l(x_{i(l)} - x_{j(l)}), \quad (4)$$

где T — отрезок ряда Тейлора до порядка $\omega(V)$ включительно разложения \prod_l в (2) как функции от x_{i_2}, \dots, x_{i_k} в точке $x_{i_2} = \dots, x_{i_k} = x_{i_1}$ (т. е. по $(x_{i_2} - x_{i_1}), \dots, (x_{i_k} - x_{i_1})$). Мы будем представлять $M(V)G$ как элемент \mathcal{L}_n , т. е.

$$M(V)G = \Sigma G'(x_1, \dots, x_n),$$

где сумма по нескольким диаграммам G' , которые получаются из G следующим образом:

1. Каждое ребро l из вершины $v \in V$ в некоторую вершину i_m , $m=2, \dots, k$, становится ребром из v в i_1 . При этом пропагатором этого ребра является производная от C_l некоторого порядка α_l .

2. Появляются новые ребра из i_1 в i_m , $m=2, \dots, k$, с пропагаторами вида

$$\frac{1}{\beta m!} (x_{i_m} - x_{i_1})^{\beta m} \text{ (векторные обозначения см. [7]).}$$

Это означает замену поддиаграммы $G(V)$ «головастиком» (т. е. диаграммой, внешние ребра которой могут исходить из единственной вершины, т. е. из x_{i_1}).

Действие M на диаграммы с $E \neq \emptyset$ определяется аналогично: любой «свободный» отросток из вершин i_2, \dots, i_m или соответствующая ему случайная величина $\xi_{i_2}^{(L)}, \dots, \xi_{i_m}^{(L)}$ «входят в Π' » и подлежат разложению в ряд Тейлора. Вообще можно сказать, что мы выделяем диаграмму $G(V)$, а произведение всех ее внешних отростков — случайных величин (как свободных, так и входящих в пропагаторы $C_l(x_{i(l)} - x_{j(l)})$) из Π' разлагаются в ряд Тейлора в точке x_{i_1} .

Очевидным образом можно определить операции $M(V_1) + M(V_2)$ и $M(V_1)M(V_2)$. Иначе говоря, для фиксированного n $M(V)$ порождают алгебру, действующую в \mathcal{L}_n . Заметим, что $M(V_1)$ и $M(V_2)$ коммутируют, если $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.

Λ -операция и R -операция. Во введенной выше алгебре M -операций с 1 (тождественное преобразование) положим

$$\Lambda(V) = 1, \text{ если } |V| = 1,$$

$$\Lambda(V) = -M(V) \sum_{\alpha} \Lambda(V_1) \dots \Lambda(V_m), \text{ если } |V| \geq 2, \quad (5)$$

где сумма по всем разбиениям $\alpha = \{V_1, \dots, V_m\}$ с $m > 1$ множества V .

Лемма—определение 1. При фиксированном n следующие определения операции $R: Z_n \rightarrow Z_n$ эквивалентны:

$$1) R = \sum_{\alpha} \Lambda(V_1) \dots \Lambda(V_m), \quad (6)$$

где сумма по всем разбиениям $\alpha = \{V_1, \dots, V_m\}$ множества $\{1, \dots, n\}$;

$$2) R = 1 + \sum (-1)^k M(V_1) \dots M(V_k), \quad (7)$$

где сумма по всем лесам, т. е. наборам $\{V_1, \dots, V_k\}$ таким, что в них отсутствуют частично-пересекающиеся пары (т. е. пары V_i, V_j такие, что $V_i \cap V_j, V_i \setminus V_j, V_j \setminus V_i$ непусты). При этом порядок умножения таков: если $V_i \supset V_j$, то $M(V_i)$ стоит левее $M(V_j)$, а в остальном порядок безразличен.

Для фиксированного n определим $\Lambda = \Lambda(\{1, \dots, n\})$. По линейности Λ и R определены на всем \mathcal{L} .

Условимся считать операции R и Λ перестановочными с интегрированием, т. е., например,

$$\begin{aligned} R \int G(x_1, \dots, x_n) \prod g_v(x_v) dx_v &= \\ = \int (RG)(x_1, \dots, x_n) \prod q_v(x_v) dx_v & \end{aligned} \quad (8)$$

или

$$\Lambda \int_A \xi_x^4(x) dx = \int_A (\Lambda: \xi_x^4(x):) dx = \int_A \xi_x^4(x) dx.$$

Перенормированное взаимодействие определим формулой

$$-U^{\text{ren}} = \Lambda(e^{-\lambda U} - 1), \quad U = U_{\kappa}. \quad (9)$$

Таким образом, U^{ren} в общем случае есть формальный ряд по λ (Напомним, что каждое произведение полиномов Вика должно быть разложено по полиномам Вика и после к каждому члену применена Λ .) Слагаемые в $U^{\text{ren}} + \lambda U$ называются контр-членами.

Рассмотрим теперь аналоги рядов (17.1) для перенормированного взаимодействия с коэффициентами $a_n^{\text{ren}}, b_n^{\text{ren}}, c_n^{\text{ren}}(A)$, где например,

$$Z^{\text{ren}} \equiv \langle e^{-U^{\text{ren}}} \rangle_0 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{\text{ren}} \lambda^n. \quad (10)$$

Заметим, что a_n^{ren} и т. д. зависят от урезания κ .

В теории формальных перенормировок есть две основные теоремы. Одна из них доказывается просто.

Теорема 1. Коэффициенты рядов (10) получаются применением R -операции к соответствующим коэффициентам рядов (17.1), т. е.

$$a_n^{\text{ren}} = R a_n, \quad b_n^{\text{ren}} = R b_n, \quad c_n^{\text{ren}}(A) = R c_n(A). \quad (11)$$

Иначе говоря, специальное введение контрчленов (9) эквивалентно применению R -операции к каждому члену ряда теории возмущений.

Доказательство. Докажем сначала первую формулу, т. е.

$$\langle \exp(-U^{\text{ren}}) \rangle_0 = R \langle \exp(-\lambda U) \rangle_0. \quad (12)$$

Перепишем левую часть

$$\begin{aligned} & \langle \exp \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-\lambda)^k}{k!} \Lambda(U^k) \right) \rangle_0 = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^m}{m!} \sum_{\substack{(k_1, \dots, k_s) \\ k_1 + \dots + k_s = m}} \frac{1}{k_1! \dots k_s!} \langle \Lambda(U^{k_1}) \dots \Lambda(U^{k_s}) \rangle_0 = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^m}{m!} \sum_{\alpha} \langle \Lambda(U^{k_1}) \dots \Lambda(U^{k_s}) \rangle_0 = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^m}{m!} R \langle U^m \rangle_0. \end{aligned} \quad (13)$$

Для доказательства остальных формул (11) достаточно заметить, что R мультипликативна в следующем смысле

$$R \langle U^m \rangle_0 \langle U^n \rangle_0 = R \langle U^m \rangle_0 R \langle U^n \rangle_0 \quad (14)$$

и, следовательно, перестановочна с операцией взятия логарифма $R \circ \ln = \ln \circ R$. Отсюда следует вторая формула (11), если взять \ln от обеих частей (12). Аналогично доказывается и третья формула.

Теорема 2 (Боголюбова—Парасюка, называемая также БПХЦ-теоремой). Для любой диаграммы G функция $RG(x_1, \dots, x_n)$ локально интегрируема.

Доказательство этой теоремы для сверхперенормируемых теорий будет следовать из более сильных оценок, доказываемых в следующем параграфе. Мы также объясним основную идею ее доказательства для перенормируемых теорий там же. Наиболее общее доказательство этой теоремы см. в [4].

Пример. Разберем теперь, как выглядит U^{ren} в модели $\varphi^4_{4,\varepsilon}$. Имеем

$$U^{\text{ren}} = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-\lambda)^k}{k!} \Lambda(\int \xi^4(x_1) \dots \xi^4(x_k) dx_1 \dots dx_k),$$

$$\underline{k=1}, \quad U_1^{\text{ren}} = \lambda \Lambda \left(\int : \xi^4(x) : dx \right) = \lambda \int : \xi^4(x) : dx, \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \underline{k=2}, \quad U_2^{\text{ren}} &= -\frac{\lambda^2}{2} \Lambda \left(\int : \xi^4(x_1) \xi^4(x_2) : dx_1 dx_2 \right) = \\ &= -\frac{\lambda^2}{2} \left[\int \int \langle : \xi^4(x_1) : : \xi^4(x_2) : \rangle dx_1 dx_2 + \right. \\ &+ 4^2 \cdot 3! \int : \xi(x_1) \xi(x_2) : C^3(x_1 - x_2) dx_1 dx_2 + \\ &\left. + 6^2 \int : \xi^2(x_1) \xi^2(x_2) : C^2(x_1 - x_2) dx_1 dx_2 \right] \quad (16) \end{aligned}$$

(от остальных членов Λ -операция при $k=2$ равна нулю; на первый член она действует тождественно, давая вакуумный контрчлен, т. е. константу, $E = \emptyset$):

$$-\frac{\lambda^2}{2} 4! \ominus \quad (17)$$

Действие Λ на третий член дает ненулевой зарядовый контрчлен лишь при $\varepsilon=0$

$$-\frac{\lambda^2}{2} 6^2 \cdot 2 \int : \xi^4(x_1) : C^2(x_1 - x_2) dx_1 dx_2. \quad (18)$$

Массовый контрчлен получается при действии Λ на второй член при $\varepsilon > 0$. При $\varepsilon > \frac{1}{3}$ он равен нулю. При $\frac{1}{6} < \varepsilon \leq \frac{1}{3}$ он равен

$$-\frac{\lambda^2}{2} 4^2 \cdot 3! \int : \xi^2(x_1) : C^3(x_1 - x_2) dx_1 dx_2. \quad (19)$$

При $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{6}$ к нему должен был бы быть добавлен член

$$-\frac{\lambda^2}{2} 4^2 \cdot 3! \left[\int : \xi(x_1) \nabla \xi(x_1) : (x_2 - x_1) C^3(x_1 - x_2) dx_1 dx_2 \right], \quad (19')$$

но он фактически конечен, так как $\int x \mathcal{G}^3(x) = 0$ в симметрической окрестности нуля, и обычно не рассматривается.

При $\varepsilon=0$ есть еще контрчлен перенормировки волновой функции (в этой терминологии нет четких определений)

$$\begin{aligned} &-\frac{\lambda^2}{2} 4^2 \cdot 3! \left[\int : \xi(x_1) \nabla^2 \xi(x_1) : \frac{(x_2 - x_1)^2}{2} C^3(x_1 - x_2) dx_1 dx_2 \right] = \\ &= -\frac{\lambda^2}{2} 4^2 \cdot 3! \left[\left(\int \frac{x_2^2}{2} C^3(x_2) dx_2 \right) \int : \xi(x_1) \nabla^2 \xi(x_1) : dx_1 \right]. \quad (20) \end{aligned}$$

Последний интеграл равен

$$\int : (\nabla \xi(x_1))^2 : dx_1,$$

например, при периодических граничных условиях.

Общий вид вакуумного и массового контрчлена при $\varepsilon > 0$ таков

$$\begin{aligned}
 -U_{\text{вак}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\lambda)^n}{n!} \Lambda(\langle U^n \rangle) = \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\lambda)^n}{n!} (-M(V)) \prod_{V_k \neq V = \{1, \dots, n\}} (1 - M(V_k)) (\langle U^n \rangle), \\
 -U_{\text{масс}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\lambda)^n}{n!} (-M(V)) \prod_{V_k \neq V} (1 - M(V_k)) \times \\
 &\times \left[\int dx_1 \dots dx_n A^2 \sum_{i < j} \xi(x_i) \xi(x_j) : \xi^4(x_1) : \dots \right. \\
 &\quad \left. \dots : \xi^3(x_i) : \dots : \xi^3(x_j) : \dots : \xi^4(x_n) : \right]_0. \quad (21)
 \end{aligned}$$

§ 4. Оценки перенормированных диаграмм

При выводе этих оценок [74, 77] мы используем основы метода многомасштабных кластерных разложений.

Моды. Исходное гауссово поле $\xi(x)$ разлагается в сумму взаимно независимых гауссовых случайных полей, называемых модами, каждая из которых имеет характерный масштаб убывания корреляций

$$\xi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n(x). \quad (1)$$

Возможностей подходящих разбиений на моды чрезвычайно много. Мы перечислим лишь малую долю. Выберем последовательность чисел

$$0 = M_0 < M_1 = 1 < M_2 < M_3 < \dots$$

и положим

$$\langle \xi_i(x) \xi_j(y) \rangle = \delta_{ij} (2\pi)^{-\nu} \int \eta_j(k) \exp(i(k, x - y)) dk, \quad (2)$$

где

$$\sum_{j=1}^{\infty} \eta_j(k) = \tilde{\varphi}(k) = (2\pi)^{-\nu} \int \langle \xi(x) \xi(y) \rangle \exp(i(k, x - y)) dk. \quad (3)$$

Далее везде

$$M_k = M^{k-1}, \quad k \geq 2, \quad (4)$$

где M выбирается достаточно большим. Глим и Джаффе [2] используют «двойной экспоненциальный» выбор $M_k = M^{(1+\tau)^{k-1}}$, $\tau > 0$.

Здесь мы будем заниматься случаем, когда

$$\tilde{\varphi}(k) = \frac{1}{(k^2 + m^2)^{1+\varepsilon}}, \quad m > 0, \quad \varepsilon > 0 \quad (5)$$

Полезные выборы η_j таковы

1)

$$\eta_j(k) = \chi_{|M_{j-1}, M_j|}(|k|) \frac{1}{(k^2 + m^2)^{1+\varepsilon}}. \quad (6)$$

2) (Паули—Вилларс, Галлавогги и др.)

$$\eta_j(k) = \frac{1}{(M_j^2 + k^2)^{1+\varepsilon}} - \frac{1}{(M_{j+1}^2 + k^2)^{1+\varepsilon}} \quad (7)$$

(считается, что $m^2 = 1$).

3) (α -представление), его то мы и будем использовать

$$\eta_j(k) = \int_{\alpha_j}^{\alpha_{j-1}} \frac{1}{\Gamma(1+\varepsilon)} \alpha^\varepsilon e^{-\alpha(k^2+m^2)} d\alpha, \quad (8)$$

где $\alpha_j = M_j^{-2}$ (см. (10.2)).

«Пропагатор» k -й моды имеет вид

$$C_k(x-y) \equiv \langle \xi_k(x) \xi_k(y) \rangle = \frac{(2\pi)^{-\nu}}{\Gamma(1+\varepsilon)} \int_{\alpha_k}^{\alpha_{k-1}} \int_{\alpha_k}^{\alpha_{k-1}} e^{i(p \cdot x - y)} \times \\ \times \alpha^\varepsilon e^{-\alpha(p^2+m^2)} d\alpha dp = \text{const} \int_{\alpha_k}^{\alpha_{k-1}} \frac{\alpha^\varepsilon}{\alpha^{\nu/2}} \exp\left(-\alpha m^2 - \frac{(x-y)^2}{4\alpha}\right) d\alpha. \quad (9)$$

Масштаб и локализация мод. Дисперсия k -й моды имеет порядок

$$\langle \xi_k^2(x) \rangle \sim CM_k^{\nu-2(1+\varepsilon)} \quad (10)$$

и оценка ковариации имеет вид

$$|\langle \xi_k(x) \xi_k(y) \rangle| \leq \text{const} M_k^{2(\frac{\nu}{2}-\varepsilon)} \frac{1}{M_{k-1}^2} \exp\left(\frac{(x-y)^2 M_{k-1}^2}{4}\right) \leq \\ \leq \text{const} M_{k-1}^{\nu-2(1+\varepsilon)} \exp\left(-\frac{1}{2}|x-y|M_{k-1}\right). \quad (11)$$

Это значит, что корреляция становится исчезающе малой при $|x-y| > M_{k-1}^{-(1-\tau)}$, $\tau > 0$ произвольно. Если ввести перенормированное расстояние (масштаб)

$$\rho(x, y) = \text{const} \frac{\rho(x, y)}{M^k} \quad (12)$$

(const не влияет на дальнейшие оценки и ее удобно выбирать из удобства обозначений), то это и будет «естественный масштаб» k -й моды.

Рассмотрим последовательность разбиений R^V на конгруэнтные кубы $\{\Delta_{1i}\}, \{\Delta_{2i}\}, \dots$. При этом объем

$$|\Delta_{ki}| = M_k^{-v}. \quad (13)$$

Все кубы Δ_{ki} для заданного k (ранга k) конгруэнтны и каждый куб Δ_{ki} является точным объединением некоторых кубов $\Delta_{k+1, l}$. Можно записать для любых N и k

$$\xi_N(x) = \sum_i \xi_{N_i}(x) \chi_{\Delta_{ki}}(x).$$

Мы будем говорить, что при $k \geq N$ моды $\xi_N(x)$ хорошо локализованы в кубах Δ_{ki} .

Замечание 1. Для «двойного экспоненциального выбора» удобно считать $k \geq N-2$ условием локализации, так как при этом уже в кубах «через один» значения $\xi_N(x)$ почти независимы.

Шкала (12) является в некотором смысле шкалой «гладкости» для моды ξ_k (см. следующий параграф).

C^L -оценки.

Теорема 1. Если G — сходящаяся диаграмма с множеством вершин $V = \{0, 1, \dots, n\}$ в модели $:\Phi^4_{\varepsilon}:$, $\varepsilon \geq 0$, или перенормированная диаграмма в этой же теории с $\varepsilon > 0$, то интеграл

$$I_G = \int (RG)(x_0, x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \quad (14)$$

(мы фиксировали $x_0 = 0$) допускает оценку (L — число ребер)

$$|I_G| \leq C^L, \quad (15)$$

где C не зависит от G и L .

Мы начнем со случая сходящейся диаграммы, ограничась для простоты обозначений случаем $\varepsilon = 0$. Тогда

$$I_G = \sum_{\mu} \int \prod_i C_{\mu_i}(x_{i(l)} - x_{j(l)}) \prod_{v \neq 0} dx_v, \quad (16)$$

где $\mu = \{\mu_i\}$ — набор номеров мод, $l \in L$. Иначе говоря, мы разложили каждый пропагатор по модам

$$C(x-y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n(x-y)$$

и сделали подстановку в интеграл. Нам понадобятся вспомогательные конструкции.

Построение дерева $\mathcal{F}(\mu)$. Пусть задан набор $\mu = \{\mu_i\}$ и пусть $i_1 > i_2 > \dots > i_k$ — всевозможные значения μ_i из этого набора. Обозначим $L_i = \{l: \mu_l = i\} \subset L$. В L_{i_1} выберем как-нибудь макси-

мальное дерево (которое может не быть связным) \mathcal{T}_1 . Далее выберем максимальное дерево \mathcal{T}_2 такое, что $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2 \subset L_{i_1} \cup L_{i_2}$

и т. д., выберем максимальные деревья $\mathcal{T}_3, \dots, \mathcal{T}_k \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{T}(\mu)$. Это построение можно сделать однозначным, если предварительно упорядочить ребра и выбирать первое в лексикографическом порядке дерево \mathcal{T}_1 , первое \mathcal{T}_2 такое, что $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$ и т. д.

Лес $\mathcal{F}(\mu)$ и выделенные вершины. Пусть \mathcal{T}_{j_p} — максимальные связные компоненты \mathcal{T}_j , G_{j_p} — граф, натянутый на \mathcal{T}_{j_p} (т. е. к \mathcal{T}_{j_p} присоединены все ребра G с вершинами в \mathcal{T}_{j_p}). Набор всех G_{j_p} , $j=1, \dots, k$, образует лес $\mathcal{F}(\mu)$.

Дерево $\mathcal{T}(\mu)$ определяет частичный порядок в V , при котором вершина $v_0=0$ является наименьшей. Каждая \mathcal{T}_{j_p} содержит наименьшую вершину v_{j_p} (назовем ее выделенной).

Частичный порядок (такой же) определен тогда и на ребрах $\mathcal{T}(\mu)$, определено также их направление «от v_0 ».

Положим для всех $v \neq v_0$

$$\tilde{\mu}_v = \mu_{l(v)}$$

для (единственного) ребра $l(v) \in \mathcal{T}(\mu)$, входящего в v . Для заданного μ рассмотрим произвольный набор $\{\Delta_v\}_{v \neq v_0}$ кубов $\Delta_v = \Delta_{\tilde{\mu}_v l(v)}$. Эти наборы (для данного μ) различаются только номерами $i_{v'}$. Тогда (16) переписывается в виде

$$\sum_{\mu} \sum_{\{\Delta_v\}} \prod_{v \neq v_0} \int_{\Delta_v} dx_v \left[\prod_i C_{\mu_i}(x_{l(i)} - x_{j(i)}) \right]. \quad (17)$$

Пусть y_v — центр куба Δ_v , v' — вторая вершина ребра $l(v)$. Тогда интеграл (17) мажорируется выражением

$$C^{|\mathcal{L}|} \sum_{\mu} \sum_{\{\Delta_v\}} \prod_{(v, v')} \exp(-\rho_{\tilde{\mu}_v}(y_v, y_{v'})) \prod_{v \neq v_0} M^{-4\tilde{\mu}_v} \prod_{l \in \mathcal{L}} M^{2\mu_l}. \quad (18)$$

При этом мы использовали (11) и «суммирование по деревьям» $\mathcal{T}(\mu)$ (см. [7]), т. е. интегрировали, начиная с наибольших вершин. (15) допускает оценку

$$\begin{aligned} C^{|\mathcal{L}|} \left(\sum_{x \in \mathbb{Z}^d} e^{-\rho(0, x)} \right)^{|\mathcal{V}|-1} \sum_{\mu} \prod_{v \neq v_0} M^{-4\tilde{\mu}_v} \prod_{l \in \mathcal{L}} M^{2\mu_l} &\leq \\ &\leq C^{|\mathcal{L}|} \sum_{\mu} \prod_{v \neq v_0} M^{-4\tilde{\mu}_v} \prod_{l \in \mathcal{L}} M^{2\mu_l}. \end{aligned} \quad (19)$$

Рассмотрим граф \hat{G} , вершинами которого являются ребра G . Ребрами \hat{G} являются любые пары (l, l') ребер G , инцидентных одной вершине. Наша цель — преобразовать последнюю сумму по μ в сумму по связным деревьям $\hat{\mathcal{T}} \subset \hat{G}$.

Лемма 1. Существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любого μ

$$M^{-4 \sum_{v \neq v_0} \tilde{\mu}_v + 2 \sum_{l \in L} \mu_l} \leq \prod_{(l, l')} M^{-\varepsilon |\mu_l - \mu_{l'}|} M^{-\varepsilon i_l}, \quad (20)$$

где произведение по всем парам ребер $l, l' \in \mathcal{F}(\mu)$, инцидентных одной вершине.

Если теперь заметить, что каждой вершине \hat{G} инцидентно не более 8 ребер \hat{G} , и использовать неравенство

$$\sum_{\mu} \leq \sum_{\mathcal{F}} \sum_{\mu: \mathcal{F}_{\mu} = \mathcal{F}}$$

то из леммы 1 «суммированием по деревьям» следует теорема 1.

Доказательство леммы. Рассмотрим произвольный граф G_{1p} . Пусть V_{1p} — число его вершин, L_{1p} — число его ребер, $\hat{\mu}_l = \min(\mu_l, i_2)$, $\delta\mu_l = \mu_l - \hat{\mu}_l$. Тогда

$$\begin{aligned} & -4 \sum_{v \neq v_{1p}, v \in G_{1p}} \mu_v + 2 \sum_{l \in G_{1p}} \mu_l = -4i_1(V_{1p} - 1) + 2 \sum_l \hat{\mu}_l + \\ & + 2 \sum_l \mu_l = -4i_1(V_{1p} - 1) + 2 \sum_l \hat{\mu}_l + 2 \sum_l (\delta\mu_l - (i_1 - i_2)) + \\ & + 2L_{1p}(i_1 - i_2) = -4i_2(V_{1p} - 1) - 4(i_1 - i_2)(V_{1p} - 1) + \\ & + 2L_{1p}(i_1 - i_2) + 2 \sum_l \hat{\mu}_l + 2 \sum_l (\delta\mu_l - (i_1 - i_2)) = \\ & = -4i_2(V_{1p} - 1) + 2 \sum_l \hat{\mu}_l + (i_1 - i_2) \omega_{G_{1p}} + 2 \sum_l (\delta\mu_l - (i_1 - i_2)). \end{aligned}$$

Проведем такие выкладки для всех G_{1p} и из левой части (17) вынесем множитель

$$M^{2 \sum (\delta\mu_l - (i_1 - i_2)) + \sum (i_1 - i_2) \omega_{G_{1p}}} \quad (21)$$

То, что остается, есть другая система μ (с $\hat{\mu}_l$ вместо μ_l). Далее применяем ту же процедуру для G_{2p} и т. д.

На последнем шаге, когда все $\mu_l \equiv i_k$, $\tilde{\mu}_v \equiv i_k$, получим множитель

$$M^{i_k \omega_G} \quad (22)$$

Так как все $\omega(G_{1p}) \leq -1$, то можно выделить из множителей (21) — (22) множитель $M^{-i_1/2}$. Оценка (20) получается так. Заметим, что $\omega_{G_{1p}} = 4 - |b_{1p}|$, где b_{1p} — множество внешних ребер G_{1p} .

По условию $b_{1p} \geq 5$, и мы от множителя $M^{\frac{1}{2} \omega_{G_{1p}}}$ отнесем каждому

внешнему ребру из $b_{1p} \cap \mathcal{F}(\mu)$ множитель

$$M^{\frac{1}{2b_{1p}}} \omega_{G_{1p}}.$$

Множитель $M^{2(\delta_{\mu l} - (i_1 - i_2))}$ отнесем ребру l .

Далее поступаем так же для графов G_{2p}, G_{3p}, \dots . Отсюда и следует (20).

Перенормированные диаграммы в сверхперенормируемых теориях. Докажем, что C в теореме 1 может зависеть лишь от ε . При $\varepsilon > 0$ примитивно расходятся могут лишь массовые поддиаграммы. Пусть $\mathcal{F} = \{V_k\}$ — лес примитивно расходящихся диаграмм в G . Так как нет частично пересекающихся расходястей, то из (7.3) следует, что

$$RG = \prod_k (1 - M(V_k)) G. \quad (23)$$

Определим множество «опасных» и «безопасных» поддиаграмм

$$\mathcal{D}(\mu) = \mathcal{F} \cap \mathcal{F}(\mu), \quad \mathcal{S}(\mu) = \mathcal{F} \setminus \mathcal{D}(\mu).$$

Рассмотрим сначала случай, когда все «вычитания» $M(V_k)$ используют только «нулевой» член ряда Тейлора. Иначе говоря, пусть $\varepsilon > \frac{1}{6}$.

Замечание. В нашем случае массовых диаграмм

$$\omega_G = -4(V-1) + 2(1-\varepsilon)L = 2 + 2\varepsilon - 4\varepsilon V.$$

Отсюда при $V=2$ получаем $\varepsilon = \frac{1}{6}$ при $\omega_G = 1$. Перепишем (23)

$$RG = \sum_{\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}(\mu)} \prod_{V_k \in \mathcal{S}'} M(V_k) (-1)^{|\mathcal{S}'|} \left[\prod_{V_k \in \mathcal{D}(\mu)} (1 - M(V_k)) \right] \quad (24)$$

и рассмотрим член суммы, соответствующий \mathcal{S}' .

Удобно следующее наглядное представление; $1 - M(V)$ создает две диаграммы: член 1 оставляет диаграмму прежней, а $M(V)$ образует в ней «головастик». Для опасных диаграмм $V_k \in \mathcal{D}(\mu)$ мы заменим разность двух этих диаграмм одной. Именно, разность двух ребер-пропагаторов

$$C_\mu(y-x_2) - C_\mu(y-x_1) = (x_2-x_1) \nabla_x C_\mu(y-x) \quad (25)$$

добавляет множитель (x_2-x_1) к прежней диаграмме и меняет $C_\mu(y-x_2)$ на $\nabla_x C_\mu(y-x)$.

Для $V_k \in \mathcal{S}'(\mu)$ будем представлять, что множитель $M(V_k)$ просто меняет ребро l от y к x_2 на ребро от y к x_1 . При этом индекс l ребра и $\mu(l)$ сохраняются.

Будем теперь проводить оценки так же, как в предыдущем доказательстве. Изменения состоят в следующем.

Каждый $\nabla_x C_\mu(y-x)$ дает дополнительный множитель, не превосходящий M^μ . В то же время, если $V = G_{jp} \in \mathcal{D}(\mu)$, то

дерево \mathcal{G}_{1p} дает множитель $\exp\left(-M^i |x_2 - x_1| \frac{1}{2}\right)$. Выделим отдельно множитель

$$|x_2 - x_1| M^i e^{-M^i |x_2 - x_1| \frac{1}{4}} \leq CM^{\mu-i} \leq CM^{i+1-i}. \quad (26)$$

Лес $\mathcal{F}(\mu)$ для G перейдет в лес $\mathcal{F}(\mu, \mathcal{F}')$ для диаграммы, соответствующей члену \mathcal{F}' в сумме (24). Все оценки делаются для леса $\mathcal{F}(\mu, \mathcal{F}')$ так же, как и раньше: единственная неприятность состоит в том, что для графов G_{jp} , например, G_{1p} состоит в том, что

$$1 - \delta = \omega_{G_{1p}} > 0, \quad \delta > 0.$$

Но учитывая множитель (26) мы получим нужную оценку

$$(i_1 - i_2) \omega_{G_{1p}} - (i_1 - i_2) \leq -\delta (i_1 - i_2). \quad (27)$$

При $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{6}$ вместо (25) можно написать

$$(x_2^{(m)} - x_1^{(m)}) (x_2^{(n)} - x_1^{(n)}) \frac{\partial^2}{\partial x^{(m)} \partial x^{(n)}} C_\mu(y-x). \quad (28)$$

Далее все аналогично. В силу (19'.3) случай (28) не нужен. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Пусть G — произвольная диаграмма теории Φ^4 . Тогда имеет место оценка

$$|RG| \leq C^L (\max_{\mathcal{F}} |\mathcal{F}|)$$

где максимум берется по всем лесам расходящихся замкнутых поддиаграмм G .

Мы дадим доказательство теоремы 2 только для случая, когда G не содержит массовых поддиаграмм. В этом случае все собственные поддиаграммы замкнуты и замкнутость в ее формулировке можно опустить, при этом отчетливо видна основная идея доказательства теоремы БПХЦ и C^L -оценок для случая существования частично-пересекающихся диаграмм. Эта идея заключается в формуле (28) (см. ниже.)

Мы используем формулу (3.6)

$$RG = \sum_F \prod_{v \in F} (-M(V)), \quad (29)$$

где сумма по всем лесам собственных примитивно расходящихся поддиаграмм. Для любого такого F обозначим

$$\mathcal{D}_\mu(F) = F \cap \mathcal{F}(\mu), \quad \mathcal{F}_\mu(F) = F - \mathcal{D}_\mu(F),$$

$\mathcal{H}_\mu(F)$ — множество всех примитивно расходящихся поддиаграмм $g \in \mathcal{F}(\mu)$, совместимых с лесом F , т. е. такое, что $F \cup \{g\}$ — лес.

Очевидно, что $\mathcal{H}_\mu(F)$ есть лес, так как $\mathcal{H}_\mu(F) \subset \mathcal{F}(\mu)$. Тогда

$$RG(\mu) = \sum_F \prod_{V \in F} (-M(V)) G(\mu) = \\ = \sum_{F': F' \cap \mathcal{F}(\mu) = \emptyset} \prod_{V \in F'} (-M(V)) \prod_{V \in \mathcal{H}_\mu(F')} (1 - M(V)) G(\mu) \quad (30)$$

или

$$RG = \sum_F \sum_{\mu: \mathcal{F}(\mu) = F} \prod_{V \in F} (-M(V)) \prod_{V \in \mathcal{H}_\mu(F)} (1 - M(V)) G(\mu). \quad (31)$$

Заметим сначала (это довольно просто проверяется), что число лесов собственных примитивно расходящихся диаграмм G не превосходит $C^{|V|}$ (см. [61], лемма A2, где $C = 8$). Поэтому в (31) можно ограничиться одним членом.

Пусть сначала $\mathcal{H}_\mu(F) = \emptyset$. Операции $M(V)$ делают тогда из поддиаграмм $V \in F$ головастики. Рассмотрим результирующую диаграмму с теми же l, μ . Мы факторизуем G по этим головастикам, начиная с меньших. Поступая так же, как при доказательстве теоремы 3.1, т. е. леммы 1, мы от каждого головастика получим логарифмически расходящийся множитель (т. е. растущий не быстрее μ_l для некоторого ребра l , инцидентного этому головастику).

Эти множители не могут повлиять на сходимость диаграммы. Этим получено доказательство БПХЦ-теоремы для данной диаграммы. Однако может возникнуть факториальный множитель (как в интеграле $\int_0^\infty \mu^n e^{-\mu} d\mu$). Если $\mathcal{H}_\mu(F) \neq \emptyset$, то предварительно в последнем произведении правой части (31) применяем $1 - M(V)$, как в теореме 1. Далее все аналогично.

§ 5. Упрощенные модели

Рассмотрим систему взаимно независимых гауссовых случайных величин $\{\eta_\Delta\}$, где $\Delta \subset R^4$ пробегает всевозможные кубы $\Delta_{1i}, \Delta_{2i}, \dots$, причем

$$\langle \eta_\Delta \rangle_0 = 0, \quad \langle \eta_\Delta^2 \rangle_0 = \Delta^{-\frac{1}{4}(2-2\epsilon)}. \quad (1)$$

Заметим, что последнее выражение совпадает с дисперсией $\langle \xi_k^2(x) \rangle$, если $\Delta = \Delta_{ki}$ (см. 10.4)). Положим вместо (1.4)

$$\xi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n(x), \quad \eta_n(x) \equiv \eta_{\Delta_{ni}} \text{ для } x \in \Delta_{ni}. \quad (2)$$

Меру, соответствующую гауссову полю $\xi(x)$, обозначим μ_0 и будем изучать слабые пределы мер μ_N , определяемых плотностью

$$\frac{d\mu_N}{d\mu_0} = Z_N^{-1} \exp(-U_N^{ren}), \quad (3)$$

$$U_N \stackrel{\text{def}}{=} \lambda \int_{\Delta_1} \eta_{<N}^4(x) : dx, \quad \eta_{<N} = \sum_{n=1}^N \eta_n. \quad (4)$$

З а м е ч а н и е 1. Иначе говоря, мы сделали два упрощения: а) ввели более строгую локализацию мод, чем обсуждалось в § 4, т. е. независимость вместо слабой зависимости в разных кубах локализации; б) считает моду постоянной в кубе, в котором она хорошо локализована.

З а м е ч а н и е 2. У $\xi(x)$ в (2) ковариации разрывны. При определении R -операции это не сказывается на контрчленах без производных. Контрчлены с производными мы полагаем равными нулю по определению.

Модель (3) называется иерархической бернуллиевой [80, 81]. Начнем же мы с еще более простой модели.

Простейшая модель без взаимодействия мод. В дополнение к предположениям а) и б) замечания 1 мы изменим и взаимодействие, а именно положим

$$U_N = \lambda \sum_{n < N} \int : \eta_n^4(x) : dx = \lambda \sum_{\Delta = \Delta_{n_i}, n_i < N} \Delta : \eta_{\Delta}^4 : \quad (5)$$

З а м е ч а н и е 3. Иначе говоря, мы исключили «перекрестные члены» — взаимодействие мод. На этой модели мы разберем идею преодоления первой трудности в неформальном построении сверхперенормируемых теорий. Эта трудность состоит в следующем. Теория формальных перенормировок обеспечивает сокращение расходимостей в каждом порядке по λ . Однако, полный ряд расходится и надо применять разложения с остаточным членом. В остаточном же члене нет сокращения расходимостей. Оказывается, однако, что, начиная с некоторого порядка, остаточные члены хорошо оцениваются, благодаря свойству локализации мод, что связано со сверхперенормируемостью или (и) сильной версией свойства асимптотической свободы.

В данном случае статистическая сумма факторизуется

$$Z_N = \prod_{\Delta = \Delta_{k_i}; k_i < N} \langle \exp(-U_{\Delta}^{ren}) \rangle_0, \quad (6)$$

где $U_{\Delta} = \lambda \Delta : \eta_{\Delta}^4 :$, и для доказательства устойчивости ($Z_N \leq \text{const}$ равномерно по N) достаточно оценки

$$\exp(-U_{\Delta}^{ren}) \leq 1 + C \Delta^{1+\delta}, \quad (7)$$

где C, δ не зависят от Δ .

Имеем

$$U_{\Delta}^{\text{рен}} = \lambda \Delta : \eta_{\Delta}^4 : + U_{\Delta}^{\text{вак}} + U_{\Delta}^{\text{масс}}, \quad (8)$$

где

$$U_{\Delta}^{\text{вак}} = \sum_{p=2}^{p_0} \frac{(-\lambda)^p}{p!} C_p \Delta^p \Delta^{-\frac{1}{4}(2-2\varepsilon)2p}, \quad (9)$$

$$U_{\Delta}^{\text{масс}} = : \eta_{\Delta}^2 : \sum_{p=2}^{p_1} \frac{(-\lambda)^p}{p!} C'_p \Delta^p \Delta^{-\frac{1}{4}(2-2\varepsilon)(2p-1)}, \quad (9')$$

где целые неотрицательные числа C_p и C'_p определяются из (21.3) и (22.3) соответственно. Для доказательства (9)–(9') заметим, что, например, вклад каждой вакуумной диаграммы с p вершинами одинаков и равен $\Delta^{\varepsilon p}$, так как $M(V)$ не меняет числа вершин и ребер, а массовой диаграммы $-\Delta^{\frac{1}{2}+\varepsilon p}$. p_0 определяется как наименьшее число $p_0 \geq \frac{1+\delta}{\varepsilon}$ для некоторого $\delta > 0$, а p_1 соответственно из неравенства $p_1 \geq \frac{1+\varepsilon+\delta}{2\varepsilon}$. Заметим, что для вакуумных диаграмм G условие $\omega_G = 4 - 4\varepsilon V < 0$ согласуется с нашим выбором p_0 . Для массовых то же самое: условие $\omega_G < 0$ эквивалентно $V > \frac{1+\varepsilon}{2\varepsilon}$.

Сделаем теперь разложение Тейлора по λ «в ячейке Δ » до порядка $p_0 - 1$ включительно

$$\langle \exp(-U_{\Delta}^{\text{рен}}(\lambda)) \rangle_0 = \left\langle \sum_{k=0}^{p_0-1} Q_k \frac{\lambda^k}{k!} + \hat{Q}_{p_0} \frac{\lambda^{p_0}}{p_0!} \right\rangle_0, \quad (10)$$

$$Q_k = \frac{\partial^k}{\partial \lambda^k} \exp(-U_{\Delta}^{\text{рен}}) \Big|_{\lambda=0},$$

$$\hat{Q}_{p_0} = \frac{\partial^{p_0}}{\partial \lambda^{p_0}} \exp(-U_{\Delta}^{\text{рен}}) \Big|_{\lambda=\lambda'}, \quad 0 \leq \lambda' \leq \lambda.$$

Нетрудно видеть, что в нашей модели все $Q_k \equiv 0$ при $k=1, \dots, \dots, p_0-1$, а остаточный член можно оценить так

$$\langle \hat{Q}_{p_0} \exp(-U_{\Delta}^{\text{рен}}(\lambda')) \rangle_0 \leq \langle \hat{Q}_{p_0}^2 \rangle_0^{1/2} \langle \exp(-2U_{\Delta}^{\text{рен}}(\lambda')) \rangle_0^{1/2}. \quad (11)$$

Мы докажем, что

$$\langle \hat{Q}_{p_0}^2 \rangle_0 = O(\Delta^{2(1+\delta)}), \quad (12)$$

$$\langle \exp(-2U_{\Delta}^{\text{рен}}(\lambda')) \rangle_0 = O(1). \quad (12')$$

Удобно приписать члену Δ размерность 1, члену $:\eta_{\Delta}^k:$ — размерность $\left(-\frac{k}{4}(1-\varepsilon)\right)$, $\langle \eta_{\Delta}^2 \rangle_0$ — размерность $\left(-\frac{2k}{4}(1-\varepsilon)\right)$, а произведению таких членов — сумму их размерностей. При применении $\langle \cdot \rangle_0$ размерность сохраняется. Тогда U_{Δ} имеет размерность ε , в $U^{\text{вак}} (U^{\text{масс}})$ каждый член имеет размерность $p - \frac{4p}{4}(1-\varepsilon) = \varepsilon p$ $\left(\frac{1}{2} + \varepsilon p\right)$ соответственно с минимумом при $p=2$. В \hat{Q}_{p_0} каждый член имеет размерность $\geq \varepsilon p_0 \geq 1 + \delta$. Отсюда и следует (12).

Оценка Вика типа (19'.2) легко дает и (12'):

$$\Delta : \eta_{\Delta}^4 : + C \Delta^{\frac{1}{2} + 2\varepsilon} : \eta_{\Delta}^2 : \geq C \Delta^{\delta_1} \quad (12'')$$

для некоторого $\delta_1 > 0$.

Замечание 4. Можно сделать оценку Вика отдельно для $:\eta_{\Delta}^4:$ и $:\eta_{\Delta}^2:$, если заметить, что первый член ряда (9') равен $C \Delta^{2\varepsilon}$, где C положительна, остальные члены равны $O(\Delta^{3\varepsilon})$. Поэтому весь коэффициент при $:\eta_{\Delta}^2:$ положителен при достаточно малых Δ .

Замечание 5. Более непосредственное использование ренормгруппы позволяет снизить количество вычитаний и сделать их число независимым от ε (см. главу 2). Важную роль здесь играет отказ от рассмотрения вакуумных перенормировок и рассмотрение эффективных взаимодействий вместо статсуммы. В этом смысле техника, описанная в главе 1, кажется лишней. Однако она более непосредственно связана с рядом теории возмущений и пока преждевременно от нее отказываться.

Мы доказали равномерную ограниченность (6)

$$Z_N \leq \prod_{\Delta} (1 + C \Delta^{1+\delta}) \leq \text{const.} \quad (13)$$

Аналогично можно получить необходимые оценки производящего функционала $\langle \exp(i\xi_0 - U_N^{\text{ren}}) \rangle_0$ и построить предельное поле.

Общая модель без взаимодействия мод. Положим теперь $(\xi_k(x))$ — моды, определенные в § 4

$$Z = \prod_N \langle \exp(-U_N^{\text{ren}}) \rangle_0, \quad (14)$$

$$U_N = \int_{\Delta_1} : \xi_N^4(x) : dx.$$

Сделаем разложение Тейлора для каждой моды по семиринвариантам с остаточным членом (18.1)

$$\langle \exp(-U_N^{\text{ren}}) \rangle_0 = \exp \left(\sum_{k=1}^{p_0-1} \frac{1}{k!} \langle U_N^{\text{ren},k} \rangle_0 + \frac{1}{p_0!} \langle -U^{\text{ren},p_0} \rangle_t \right),$$

$$\langle \cdot \rangle_t = \frac{\langle \cdot \exp(-tU_N^{ren}) \rangle_0}{\langle \exp(-tU_N^{ren}) \rangle_0}, \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (15)$$

Выделим в правой части (15) под экспонентой члены с коэффициентами λ^k , $k \leq p_0 - 1$. Это будет сумма

$$\sum_{k=2}^{p_0-1} \frac{(-\lambda)^k}{k!} R \langle U_N^k \rangle_0. \quad (16)$$

Мы докажем, что сумма (16) имеет оценку $CM^{-\delta N}$, $C > 0$, $\delta > 0$. Для этого воспользуемся C^L -оценками перенормированных диаграмм, а точнее доказательством теоремы 1 (§ 4). Как видно из этого доказательства (а оно в случае фиксированной моды гораздо проще), дополнительно появляется искомый множитель. При этом C зависит только от p_0 , но не от N .

Остальные члены (15) мы оценим, используя так называемый скейлинг и одномасштабное кластерное разложение.

При преобразовании $x \rightarrow y = M^N x$ куб Δ_N перейдет в единичный куб, куб Δ_1 — в куб Λ со стороной M^N . Кроме того, подставим $\xi_N = d \hat{\xi}_N$, $d = \langle \xi_N^2 \rangle^{1/2}$, а перенормированное поле ξ_N , т. е. $\hat{\xi}_N = \frac{\xi_N}{d}$ имеет единичную дисперсию и экспоненциальное убывание корреляций в Λ («в единичном масштабе») (при этом мера μ_0 на (Ω, Σ) остается той же, а меняются только случайные величины).

Проверим теперь как будет выглядеть взаимодействие и корреляционные функции для $\hat{\xi}_N(y)$ после этих преобразований. Например,

$$\lambda \int_{\Delta_1} \xi_N^4(x) : dx = \lambda \Delta d^4 \int_{\Lambda} \hat{\xi}_N^4(y) : dy. \quad (17)$$

Аналогично в $\langle U_N^{ren, k} \rangle_0$ в членах при λ степени $s \geq p_0$ появится множитель $(\lambda_{gen})^s$, $\lambda_{gen} = \lambda \Delta d^4$, при «перенормированных» семиинвариантах и диаграммах в единичном масштабе. Все эти величины в единичном масштабе допускают оценку $O(\Lambda)$ (например, с помощью «суммирования по деревьям» [6]). Но

$$O(\Lambda) \lambda_{gen}^s = O(\Lambda) O(\Lambda^{1+\delta}) = O(\Lambda^\delta). \quad (18)$$

Для оценки $\langle \cdot \rangle_t$ в (15) надо использовать дополнительно одномасштабное кластерное разложение и кластерную оценку для него. Тогда снова возникает оценка (18), которая дает оценку $1 + O(\Lambda^\delta)$ для (15).

Иерархическая бернуллиевская модель. В этой модели уже есть взаимодействие мод, причем в ситуации довольно хорошо моделирующей общую, и на ее примере удобно продемонстрировать метод, обобщающийся на неиерархический случай.

Пусть Q_k — множество всех кубов $\Delta_{ki} \subset \Delta_1$, где Δ_1 — выделенный куб размера 1, $Q = Q_{<N} = \bigcup_{k=1}^N Q_k$.

Для любого $\Delta \in Q$ обозначим

$$S_\Delta = \sum_{\Delta' \in Q: \Delta \subset \Delta'} \eta_{\Delta'}, \quad \hat{S}_\Delta = S_\Delta / \langle S_\Delta^2 \rangle^{1/2}.$$

Заметим, что если $\Delta = \Delta_{ki}$, то

$$\langle \eta_\Delta^2 \rangle = M^{k(2-2\varepsilon)}, \quad d_k \stackrel{\text{def}}{=} \langle S_\Delta^2 \rangle^{1/2} = \sqrt{c_1 M^{k(2-2\varepsilon)}},$$

$$\frac{1}{2} \leq c_1 \leq 1. \quad (19)$$

Фиксируем значения всех η_Δ , $\Delta \in Q_{<N-1}$, и будем вычислять среднее $\langle \exp(-U_x^{\text{ren}}) \rangle_N$ по распределению всех η_Δ , $\Delta \in Q_N$. Пусть множество $E \subset Q_N$ таково, что

$$|\hat{S}_\Delta| > (N-1)^q \text{ при } \Delta \in E,$$

$$|\hat{S}_\Delta| < (N-1)^q \text{ при } \Delta \in \bar{E}. \quad (20)$$

Для данного множества кубов E будем обозначать $\tilde{E} = \bigcup_{\Delta \in E} \Delta$.

Пусть B — некоторое множество кубов $\Delta \in Q_N$ таких, что $\Delta \subset \tilde{E}$. Пусть \hat{B} — событие, состоящее в том, что

$$|\eta_\Delta| > \frac{1}{2} (N-1)^q d_{N-1}, \quad \Delta \in B,$$

$$|\eta_\Delta| < \frac{1}{2} (N-1)^q d_{N-1}, \quad \Delta \in \bar{B}, \quad \Delta \subset \tilde{E}. \quad (21)$$

Наконец для $D \subset Q_N$ пусть \hat{D} — событие, состоящее в том, что

$$|S_\Delta| > \frac{1}{2} (N-1)^q d_{N-1}, \quad \Delta \in D,$$

$$|S_\Delta| < \frac{1}{2} (N-1)^q d_{N-1}, \quad \Delta \in Q_N \setminus D. \quad (22)$$

Ниже доказывается
Лемма 1.

$$\langle \exp(-U_x^{\text{ren}}) \rangle_N \leq \sum_{B, D} C^{|B|} p(\hat{B} \cap \hat{D}) \langle \exp(-U_\Lambda^{\text{ren}}) \rangle_N \leq$$

$$\leq \sup_{\Lambda \subset \Delta_1 \setminus \tilde{E}} \exp(-U_{N-1, \Lambda}) \left[\prod_{\Delta \in Q_N} (1 + C\Delta^{1+\delta}) \right], \quad (23)$$

где $\Lambda = \Delta_1 \setminus (\tilde{B} \cup \tilde{D})$, а определяемое ниже $U_{N-1, \Lambda}$ не зависит от η_Δ , $\Delta \in Q_N$, и в нем все моды в точках $x \in \Delta_1 \setminus \Lambda$ равны нулю.

Заметим сначала, что

$$P(\hat{B}) \leq (\exp(-CN^{2q}))^{|B|} \leq (C\Delta^{1+\delta})^{|B|}. \quad (24)$$

Теперь в $\langle \cdot \rangle_N$ мы будем интегрировать по $\tilde{B} \cap \hat{D}$. При этом будем постепенно избавляться от переменных η_Δ , $\Delta \in Q_N$, с помощью следующих процедур:

1. для $\Delta \in D$ мы используем доминирование членом S_Δ^4 ;
2. на $B \setminus D$ мы используем оценку Вика;
3. в остальных кубах Δ (т. е. в Λ) мы используем кластерное разложение по N -й моде.

Переходим к подробным объяснениям. Для этого запишем сначала взаимодействие в следующем виде

$$U_{\kappa}^{ren} = \sum_{\Delta \in Q_N} \lambda \Delta : S_{\Delta}^4 : + \sum_{\Delta \in Q_N} \Delta : S_{\Delta}^2 : A_{\Delta} + U^{vak}, \quad (25)$$

где A_{Δ} — сумма соответствующих массовых диаграмм, в которых (произвольная) точка $x \in \Delta$ фиксирована, а по остальным ведется интегрирование по Δ_1 .

Определим операцию $\tilde{\Gamma}_{\Delta}$, $\Delta \in Q$, действующую на произвольную диаграмму следующим образом: все поля в точках $x \in \Delta$, входящие в подинтегральное выражение диаграммы, полагаются равными нулю, т. е. уничтожаются все интегрирования по Δ .

Положим $\Gamma_{\Delta} = 1 - \tilde{\Gamma}_{\Delta}$ (1 — тождественное преобразование). Докажем, что

$$\exp(-U_{\kappa, \Delta_1}^{ren}) \leq \exp(-U_{\kappa, \Delta_1 \setminus D}^{ren}). \quad (26)$$

Для этого упорядочим все $\Delta \in D$ в порядке возрастания S_{Δ} : первый — $\Delta^{(1)}$, где $S_{\Delta^{(1)}}$ максимально и т. д., $\Delta^{(2)}, \dots$. Начнем с $\Delta^{(1)}$ и докажем, что

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{\Delta^{(1)}} &\equiv \lambda \Delta : S_{\Delta^{(1)}}^4 : + \Delta : S_{\Delta^{(1)}}^2 : A_{\Delta} + \Gamma_{\Delta^{(1)}}(U^{vak}) + \\ &+ \sum_{\tilde{\Delta} : \tilde{\Delta} \neq \Delta^{(1)}, \tilde{\Delta} \in Q_N} \Delta : S_{\tilde{\Delta}}^2 : \Gamma_{\Delta^{(1)}}(A_{\tilde{\Delta}}) > 0. \end{aligned} \quad (27)$$

Для этого достаточно доказать, что $\lambda \Delta S_{\Delta^{(1)}}^4$ превосходит сумму всех остальных членов. Действительно, он отличается от членов $6 S_{\Delta^{(1)}}^2 \langle S_{\Delta^{(1)}}^2 \rangle$ и $3 \langle S_{\Delta^{(1)}}^2 \rangle^2$, по меньшей мере, множителем $C N^{2q}$.

Заметим далее, что асимптотика вакуумных диаграмм (с одной фиксированной точкой) не превосходит асимптотики диаграммы $G = \ominus$, равной

$$M^{N_{\ominus G}} = M^{N(-8-8e+4(4-2+1))} = M^{4N-8eN}.$$

Поэтому

$$\Gamma_{\Delta^{(1)}}(U^{vak}) \leq C \Delta M^{4N-8eN} = o(\Delta S_{\Delta}^4). \quad (28)$$

Аналогично

$$\begin{aligned} \Delta : S_{\Delta}^2 : \Gamma_{\Delta(1)}(A_{\Delta}) &= O\left(\Delta^2 \sup_{\Delta} | : S_{\Delta}^2 : | \ominus \right) = \\ &= O\left(\Delta^2 \sup_{\Delta} S_{\Delta}^2 M^{N(-6-6e+4(3-2+1))}\right) = o(\Delta^2 S_{\Delta}^4). \end{aligned} \quad (29)$$

Отсюда и следует (27) и по индукции $U_{\Delta_1} > U_{\Delta_1-D}$, т. е. (26).

Перейдем теперь к множеству $B \setminus D$. Ввиду (24) нам достаточно оценки

$$\exp(-(U_{\Delta_1 \setminus D} - U_{\Delta_1 \setminus (B \setminus D)}) \leq C^{|B|}, \quad (30)$$

т. е. вместо (29) достаточно оценки Вика

$$\tilde{U}_{\Delta} \geq \text{const} \quad (31)$$

для всех $\Delta \in B \setminus D$.

Обозначим

$$\dot{U}_{\Delta} = \lambda \Delta : S_{\Delta}^4 : + \Delta : S_{\Delta}^2 : A_{\Delta} \quad (32)$$

и применим оценку Вика для \dot{U}_{Δ} , воспользовавшись тем, что как и в (29)

$$|A_{\Delta}| = O\left(\Delta^{-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}p}\right). \quad (33)$$

Третий член в (27) оценивается так же, как в (28) и ввиду того, что $\Delta \in Q_N \setminus D$, имеем

$$\Gamma_{\Delta}(U^{\text{вак}}) = o(\Delta^{\delta}) \quad (34)$$

для некоторого $\delta > 0$.

Замечание 6. Здесь и в дальнейшем важную роль играет выбор оценок (20)–(22), впервые имеющих у Галлавогги [80] с одной стороны,

$$k^q = (-\log \Delta_k)^q = o(\Delta_k^{-\delta'}) \quad (35)$$

для сколь угодно малого $\delta' > 0$ и поэтому возможны оценки типа (34). С другой стороны,

$$\exp(-k^{2q}) = o(\Delta_k^{1+\delta}) \quad (36)$$

и поэтому допустимы оценки типа (24).

Четвертый член в (27) оценивается аналогично, используя (33) и неравенство

$$\sup_{\Delta} |S_{\Delta}^2| = O(N^{2q} \langle S_{\Delta}^2 \rangle). \quad (37)$$

Отсюда следует первое неравенство (23). Для $\Delta \in Q_N \setminus (DUB)$ разложим

$$\exp(-\dot{U}_\Delta) = \exp\left(\sum_{k=1}^{p_0-1} \frac{(-1)^k}{k!} \langle \dot{U}_\Delta^k \rangle_{\eta_\Delta} + \frac{1}{p_0!} \langle \dot{U}_\Delta^{p_0} \rangle_{\eta_{\Delta,t}}\right), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (38)$$

$$\langle \cdot \rangle_{\eta_{\Delta,t}} = \frac{\langle \cdot \exp(-t\dot{U}_\Delta) \rangle_{\eta_\Delta}}{\langle \exp(-t\dot{U}_\Delta) \rangle_{\eta_\Delta}}.$$

Многие члены под экспонентой в правой части (38) можно оценить как $O(\Delta^{1+\delta})$ счетом размерностей, как и выше. Среди них последний семиинвариант $\langle \cdot \rangle_{\eta_{\Delta,t}}$. Действительно, если разложить его по моментам, экспоненты внутри каждого момента оценить как

$$c_1 \leq \exp(-t\dot{U}_\Delta) \leq c_2,$$

для получившегося момента посчитать размерности, то и получится искомая оценка.

Из оставшихся членов выделим теперь члены степени не большей $p_0 - 1$ по λ (остальные члены дадут $O(\Delta^{1+\delta})$) и добавим к ним соответствующие члены из $U^{\text{бак}}$. Положим

$$\begin{aligned} U_{N-1,\Lambda} &= \sum_{\Delta \in Q_N \setminus (DUB)} \sum_{k=1}^{p_0-1} \frac{(-\lambda)^k}{k!} R_\Delta \langle U_\Delta^k \rangle_{\eta_\Delta} \stackrel{\text{def}}{=} \\ &\stackrel{\text{def}}{=} U_\Lambda^{\text{бак}} + \sum_{r=1}^{p_0-1} \frac{(-\lambda)^r}{r!} \sum_{k,l:k+2l=r} \langle U_\Delta^k, U_\Delta^{\text{макс},l} \rangle_{\eta_\Delta}. \end{aligned} \quad (39)$$

Последняя сумма может быть разбита в сумму членов вида

$$\Delta^r \langle :S_{\Delta_1}^4, \dots, :S_{\Delta_k}^4, :S_{\Delta_{k+1}}^2 : A_{\Delta_{k+1}}, \dots, :S_{\Delta_{k+l}}^2 : A_{\Delta_{k+l}} \rangle_{\eta_\Delta}. \quad (40)$$

В данной иерархической модели $\Delta_1 = \dots = \Delta_{k+l}$ (сохранение локальности в иерархической модели). Из леммы 1 следует тогда

$$\langle \exp(-U_{N-1,\Lambda}^{\text{рен}}) \rangle \leq \left[\prod_{\Delta \in Q_N} (1 + C\Delta^{1+\delta}) \right] \sup_{\Lambda} \langle e^{-U_{N-1,\Lambda}} \rangle. \quad (41)$$

Дальнейшая оценка протекает по индукции. Однако $U_{N-1,\Lambda}$ имеет теперь несколько другой вид (39) — (40) и необходимы некоторые изменения в рассуждениях.

Фиксируем теперь S_Δ , $\Delta \in Q_{N-2}$, и пусть $E_{N-2} \subset Q_{N-2}$, $\bar{E} \subset \Lambda$, таково, что

$$\begin{aligned} |\hat{S}_\Delta| &> (N-2)^q, \quad \Delta \in E_{N-2}, \\ |\hat{S}_\Delta| &< (N-2)^q, \quad \Delta \in \bar{E}_{N-2}, \quad \Delta \subset \Lambda. \end{aligned} \quad (42)$$

Соответственно вводятся $B = B_{N-2}$ и $D = D_{N-2}$, $\tilde{B}_{N-2} \subset \tilde{E}_{N-2}$, $\tilde{D}_{N-2} \subset \Lambda$. При устранении взаимодействия на D_{N-2} , т. е. при доказательстве доминирования члена S_{Δ}^4 достаточно заметить, что для всех оставшихся $\Delta \in Q_{N-2}$ после первого шага (в силу деления к E) и, в частности, для $\Delta \in D_{N-2}$

$$|\hat{S}_{\Delta}| < (N-1)^q. \quad (43)$$

Поэтому достаточно, в дополнение к изложенной процедуре, использовать счет размерностей при доказательстве доминирования S_{Δ}^4 . Остальное также аналогично. Перед разложением (38) будем считать, что поля принимают произвольные значения, завышая оценку.

Мы получаем таким образом последовательность взаимодействий U_{N-1}, U_{N-2}, \dots . Возможная трудность при этом состоит в том, что число различных членов в U_k может расти с уменьшением k . Заметим, однако, что если степень данного члена по λ более $p_0 - 1$, то он оценивается счетом размерностей, как объяснено выше, и исчезает на следующем шаге. Поэтому в действительности число различных (неэквивалентных) диаграмм в U_k ограничено равномерно по k .

Отсюда следует оценка (13) для иерархической бернуллиевской модели.

Глава 2

РЕНОРМГРУППА И МНОГОМАСШТАБНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ

§ 1. Ренормгруппа Вильсона

Здесь описывается общая стратегия построения моделей евклидовой теории поля, несколько отличная от применявшейся в главе 1. Основной процедурой, которой мы пользовались в § 5 главы 1, было последовательное интегрирование мод. При этом осуществлялся переход к более крупному масштабу. Удобно действовать в одном масштабе, этот переход к единому масштабу и приводит к использованию ренормгруппы.

В действительности конечная частично уже достигнутая цель приводимых ниже рассматриваний: полный контроль над гибсовскими полями в окрестности гауссовой неподвижной точки или даже в окрестности любого гауссова поля.

Ренормгруппой (скейлингом) называется группа $R_s^{(a)} = R_s$ (a — вещественный параметр) автоморфизмов алгебры \mathfrak{A} в себя, порождаемая преобразованиями

$$(R_s^{(a)} \xi)(x) = s^a \xi(sx) \quad (1)$$

или, точнее,

$$(R_s^{(a)} \xi)(\varphi) = \xi(R_s^{(a)} \varphi), \quad (R_s^{(a)} \varphi)(x) = s^{a-\nu} \varphi(s^{-1}x). \quad (1')$$

Аналогично для $\psi, \bar{\psi}$. Это преобразование заключается, таким образом, в изменении масштаба на R^v и на множестве значений поля.

Если $s \geq 1$ ($s \leq 1$), то соответствующая полугруппа называется инфракрасным (ультрафиолетовым) скейлингом.

Двойственная группа R_s^* (параметр a фиксирован) действует на состояния μ на \mathfrak{A} по формуле

$$\langle A \rangle_{R_s^* \mu} = \langle R_s A \rangle_{\mu}.$$

Неподвижные точки R_s^* называются автомодельными состояниями (полями).

В случае гауссова состояния с нулевыми средними изменение меры $\mu \rightarrow R_s^* \mu$ эквивалентно изменению ковариации

$$C(x) \rightarrow s^{2a} C(sx) \quad \text{или} \quad \tilde{C}(p) \rightarrow s^{2a-v} \tilde{C}\left(\frac{p}{s}\right). \quad (2)$$

Мы будем рассматривать случай, когда

$$\tilde{C}(p) = \frac{D(p)}{p^{2(1+\varepsilon)}} = \text{const} \int_0^{\infty} D(p) \alpha^{\varepsilon} e^{-\alpha p^2} d\alpha, \quad (3)$$

где $D(p)$ — однородный по p многочлен степени d , если данное гауссово поле существует.

Если обозначить

$$\tilde{C}(p; \alpha_1, \alpha_2; m) = \text{const} D(p) \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \alpha^{\varepsilon} e^{-\alpha(p^2+m^2)} d\alpha,$$

то

$$R_s^* \tilde{C}(p; \alpha_1, \alpha_2; m) = s^{2a-v+2(1+\varepsilon)-d} \tilde{C}(p; s^{-2}\alpha_1, s^{-2}\alpha_2; sm). \quad (4)$$

Преобразование (4) особенно просто для значения

$$a = \frac{v+d-2(1+\varepsilon)}{2}, \quad (5)$$

называемого каноническим. Для этого значения гауссово поле с ковариацией (3) является автомодельным.

Состояние на \mathfrak{A} называется ультрафиолетово (инфракрасно) асимптотически свободным (УАС или ИАС), если его предел при действии ультрафиолетового (инфракрасного) скейлинга, т. е. при $s \rightarrow 0$ ($s \rightarrow \infty$), является автомодельным гауссовым полем (далее везде имеется в виду каноническое значение параметра). Асимптотическая свобода проверяется a posteriori, т. е. после построения этого поля. Однако факт асимптотической свободы, наблюдаемый уже по теории возмущений, играет роль при построении этого поля.

Аналогично предыдущей главе, рассмотрим разбиение

$$\xi(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k(x) \quad (6)$$

на независимые моды $\xi_k(x)$ с ковариациями

$$\bar{C}_k = \bar{C}(p; M_k^{-2}, M_{k-1}^{-2}; 0), \quad M_k \equiv M^{k-1}, \quad (7)$$

где k меняется от $-\infty$ до ∞ (в отличие от предыдущей главы). Заметим при этом, что распределения гауссовых полей $M^{-\alpha} \xi_k(M^{-1}x)$ и $\xi_{k-1}(x)$ совпадают.

Удобно рассматривать расширенную алгебру $\bar{\mathfrak{A}}$, натянутую на все $\xi_k(x)$ (счетное множество индексов), и состояния на $\bar{\mathfrak{A}}$. При этом скейлинг действует на каждую $\xi_k(x)$ по формуле (1).

Пусть \mathfrak{A}_N — подалгебра алгебры $\bar{\mathfrak{A}}$, порожденная всеми $\xi_k(x)$ с $k \leq N$. Скейлинг R_s и R_s^* определяются аналогично на $\bar{\mathfrak{A}}$, \mathfrak{A}_N и $\bar{\mathfrak{A}}^*$, \mathfrak{A}_N^* .

Для любого состояния μ на $\bar{\mathfrak{A}}$ обозначим P_{μ} его ограничение на \mathfrak{A}_N . Пусть ν — гауссова мера с ковариацией (3) и $\nu^N = P_N \nu$.

В предыдущей главе мы рассматривали урезанные («затравочные» или «голые») состояния на \mathfrak{A}_N вида

$$d\mu^{N,N} = \exp(-U^{N,N}) d\nu^N,$$

являющиеся гиббовскими перестройками меры ν^N в конечном (или бесконечном) объеме. Все взаимодействия далее определены с точностью до аддитивной константы.

Последовательным интегрированием мод мы получали меры на \mathfrak{A}_{n-}

$$d\mu^{N,n} = \exp(-U^{N,n}) d\nu^n, \quad n = N-1, N-2, \dots$$

(эффективные меры в масштабе M_n при начальном урезании M_N). Наша цель в § 5 главы 1 была — доказать существование предела на \mathfrak{A}

$$\mu = \lim_{N \rightarrow \infty} \mu^{N,N}$$

или пределов на \mathfrak{A}_n

$$\mu^n = \lim_{N \rightarrow \infty} \mu^{N,n}.$$

Удобно работать в одном масштабе, т. е. в одной алгебре, например, в \mathfrak{A}_1 , рассматривая не перестройки различных мер ν^n , а одной меры ν^1 . Обозначим через S автоморфизм $\bar{\mathfrak{A}}$, порожденный $S\xi_k(x) = \xi_{k+1}(x)$. Тогда $S\mathfrak{A}_n = \mathfrak{A}_{n+1}$. Для любой меры μ^n на \mathfrak{A}_n определим меру

$$\tilde{\mu}^n \stackrel{\text{def}}{=} (S^*)^{n-1} (R_{M^{-1}}^*)^{n-1} \mu^n$$

на \mathfrak{A}_1 . Тогда $\tilde{\mu}^n$ является гиббсовской перестройкой v^1 ввиду (пусть $F \in \mathfrak{A}_{n-m+1}$)

$$\begin{aligned} \langle F \rangle_{\tilde{\mu}^n} &= \langle S^{m-1} R_{M_m^{-1}} F \rangle_{\mu^n} = \langle (S^{m-1} R_{M_m^{-1}} F) \exp(-U^n) \rangle_{v^n} = \\ &= \langle F \exp(-S^{-m+1} R_{M_m} U^n) \rangle_{(S^*)^{m-1} R_{M_m^{-1}} v^n} = \\ &= \langle F \exp(-S^{-m+1} R_{M_m} U^n) \rangle_{v^{n-m+1}} \end{aligned} \quad (8)$$

и, значит,

$$\langle F \rangle_{\tilde{\mu}^n} = \langle F \exp(-\tilde{U}^n) \rangle_{v^1}, \quad (9)$$

где

$$\tilde{U}^n = S^{-n+1} R_{M_n} U^n. \quad (10)$$

Чтобы перевести интегрирование мод в один масштаб, рассмотрим следующую коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \mu^{N,n} & \xrightarrow{\quad} & \tilde{\mu}^{N,n} \\ P_{n-1} \downarrow & (S^*)^{n-1} R_{M_n^{-1}}^* \downarrow W & \\ \mu^{N,n-1} & \xrightarrow{\quad} & \tilde{\mu}^{N,n-1} \\ & (S^*)^{n-2} R_{M_{n-1}}^* & \end{array}$$

где

$$\begin{aligned} W &= (S^*)^{n-2} R_{M_{n-1}}^* P_{n-1} (S^*)^{-(n-1)} R_{M_n}^* = \\ &= P_1 (S^*)^{-1} R_M^* = (S^*)^{-1} R_M^* P_0. \end{aligned} \quad (11)$$

является отображением \mathfrak{A}_1^* в себя.

Заметим, что мы снабжаем таким образом меры и взаимодействия, переведенные в единичный масштаб, волной. Например, $\tilde{\mu} = \lim_{N \rightarrow \infty} \tilde{\mu}^{N,N}$ и т. д. Полугруппа W^k называется ренормгруппой Вильсона.

Заметим, что определение ренормгруппы Вильсона зависит от выбора разбиения на моды, а этот последний определяется соотношениями удобства (важна гладкость пропагаторов и т. д.).

Ренормгруппа Вильсона соответствует инфракрасному скейлингу. Можно определить двойственный вариант ренормгруппы Вильсона, соответствующий ультрафиолетовому скейлингу. Однако

он не удобен для вычислений, так как дисперсия $\xi(x) = \sum_{k=-1}^{\infty} \xi_k(x)$ бесконечна, в отличие от конечности дисперсии $\xi(x) = \sum_{k=-\infty}^1 \xi_k(x)$.

Формальное разложение для ренормгруппы Вильсона.
 Пусть дана некоторая мера $\tilde{\mu}$

$$d\tilde{\mu} = \exp(-\lambda \tilde{U}(\xi(x))) d\nu^1,$$

где через $\xi(x)$ обозначено гауссово поле с ковариацией $\sum_{k=-\infty}^1 C_{kr}$, которая совпадает с ковариацией суммы двух независимых гауссовых полей

$$\eta(x) + M^{-a}\xi(M^{-1}x),$$

где $\eta(x)$ имеет ковариацию C_1 . Тогда

$$\begin{aligned} \frac{d(W\tilde{\mu})}{d\nu^1} &= \langle \exp(-\lambda \tilde{U}(M^{-a}\xi(M^{-1}x) + \eta(x))) \rangle_{\eta} = \\ &= \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-\lambda)^k}{k!} \langle \tilde{U}^{(k)}(M^{-a}\xi(M^{-1}x) + \eta(x)) \rangle_{\eta}\right) = \\ &\stackrel{\text{де}}{=} \exp(-\tilde{U}_{\text{эфф}}(\xi(x))), \end{aligned} \quad (12)$$

где средние и семинварианты берутся по распределению η . В общем случае ряд по семинвариантам формальный, однако в случае фермионных полей и полиномиального взаимодействия U вида (13) он сходится для достаточно малых λ .

Здесь и далее U является конечной суммой членов вида

$$a_{\alpha_1 \dots \alpha_n} \int: \prod_{i=1}^n \xi^{(\alpha_i)}(x): dx, \quad (13)$$

$\alpha_i = (\alpha_i^1, \dots, \alpha_i^y)$, а $\xi^{(\alpha_i)}$ — производная по x^1 порядка α_i^1, \dots , по x^y — порядка α_i^y .

Прежде чем идти дальше, докажем сходимость ряда по семинвариантам в (12) для достаточно малых $|\lambda|$ по норме в \mathfrak{A} такой, что $\|\xi(x)\| = \text{const} < \infty$ не зависит от x . Для этого нужны хорошие оценки семинвариантов функционалов от $\eta(x)$, чем мы и займемся в следующем параграфе.

§ 2. Одномасштабные кластерные оценки для ферми-полей

Здесь приводится комбинаторный метод оценки семинвариантов, принадлежащий Гавендзкому—Купляйнену [100]. Он основан фактически на комбинаторной технике [123], упрощенной Зайлером [5].

Рассмотрим гауссово поле $\eta = \{\eta_i(x), \bar{\eta}_i(x), i = 1, \dots, s\}$, с мерой ν^1 . Получить оценки семинвариантов на решетке — довольно стандартная задача. Основная идея, как сделать это на R^y , состоит в том, что поле η в единичном кубе «почти

конечномерно», что фактически сводит R^v к решетке. Иначе говоря, R^v разбивается на единичные кубы Δ_i и в каждом кубе Δ выбирается хорошее конечномерное приближение для $\eta(x)$, $x \in \Delta$.

Лемма 1. Для любых Δ_1 и Δ_2 пусть $x_1, \dots, x_n \in \Delta_1$, $y_1, \dots, y_n \in \Delta_2$. Тогда для любого $\alpha > 0$ существует $C(M, \alpha)$, что

$$|\Gamma_n| = \left| \left\langle \prod_{i=1}^n \eta_{\alpha_i}(x_i) \bar{\eta}_{\beta_i}(y_i) \right\rangle \right| \leq \leq \frac{1}{(n!)^{2\alpha}} (C(M, \alpha))^n \exp(-4n \operatorname{dist}(\Delta_1, \Delta_2)). \quad (1)$$

Доказательство. Рассмотрим два случая

A) $\operatorname{dist}(\Delta_1, \Delta_2) \leq a \ln n$;

B) $\operatorname{dist}(\Delta_1, \Delta_2) > a \ln n$, $a = 1 + 2\alpha$.

Заметим, что из первого неравенства (11.4.1) следует, что для всех A $|C(x-y)| \leq C(A, M) e^{-A|x-y|}$ и, значит, в случае B)

$$|\Gamma_n| \leq n! (C(M))^n e^{-5n \operatorname{dist}(\Delta_1, \Delta_2)} \leq n! (C(M))^n e^{-na \ln n} e^{-4n \operatorname{dist}(\Delta_1, \Delta_2)},$$

что и дает (1).

В случае (A) положим $R = 2a \ln n$,

$$C(x-y) = C^0(x-y) + C^1(x-y),$$

где

$$C^0(x-y) = \sum_{r \in Z^v} C(x-y+rR) = \sum_{p \in \frac{2\pi}{R} Z^v} R^{-v} e^{ip(x-y)} \hat{C}(p).$$

Тогда

$$|\Gamma_n| \leq \sum_{I, J, m} \left| \left\langle \prod_{i \in I} \tilde{\eta}_{\alpha_i}(x_i) \prod_{j \in J} \tilde{\eta}_{\beta_j}(y_j) \right\rangle_{C^0} \right| \left| \left\langle \prod_{i \in I^c} \prod_{j \in J^c} \right\rangle_{C^1} \right|, \quad (2)$$

где сумма по всем $I, J \subset \{1, \dots, n\}$, $|I| = |J| = m$.

Разлагая в первых скобках

$$\tilde{\eta}_j(x) = \sum_p R^{-v} e^{ipx} \tilde{\eta}_j(p), \quad \tilde{\eta}_j^2(p) = 0, \quad (3)$$

$$\langle \tilde{\eta}_j(p) \tilde{\eta}_j(q) \rangle = R^v \hat{C}(p) \delta_{p,-q};$$

$$|\Gamma_n| \leq \sum_m C^n m! \sum_{\{p_i\}} R^{-vm} \prod_{i=1}^m \hat{\Gamma}(p_i) (n-m)! (C(M))^{n-m} e^{-3R(n-m)},$$

где сумма по всем наборам индексов $p_1 \geq p_2 \geq \dots \rightarrow p_m$, причем для любого $p \in \frac{2\pi}{R} Z^v$ не более $2s$ индексов i таких, что $p_i = p$.

Поэтому $\sum p_i^2 \geq Cm^2$, и так как

$$\hat{C}(p) = \operatorname{const} \frac{1}{p^2} (e^{-p^2} - e^{-M^2 p^2}),$$

то

$$|\Gamma_n| \leq \sum_m C^n m! C(M)^m e^{-\frac{Cm^2}{R^2}} (n-m)! (C(M))^{n-m} e^{-3R(n-m)}.$$

Откуда легко следует (1).

Для семиинвариантов, однако, верны только следующие оценки.

Через F с различными индексами будем обозначать мономы вида

$$F = \prod \eta_{\alpha_j}(x_j) \prod \bar{\eta}_{\beta_i}(y_i). \quad (4)$$

Носителем F назовем множество x_j и y_i .

Лемма 2. Если степени мономов F_i равномерно ограничены и носители всех F_i принадлежат одному единичному кубу Δ , то

$$|\langle F_1, \dots, F_N \rangle| \leq C^N N! \quad (5)$$

Доказательство легко следует из выражения семиинвариантов через моменты и из леммы 1.

Разобьем R^v на единичные кубы Δ_i и пусть снова степени F_i равномерно ограничены. Носитель F_k принадлежит какому-либо из кубов Δ_j (возможно разным для разных i). Тогда имеет место Лемма 3.

$$|\langle F_1, \dots, F_N \rangle| \leq \left[\prod_{\Delta \in \tau} N_{\Delta}! \right] C^N \exp(-d_{\tau}), \quad (6)$$

где τ — множество всех кубов, содержащих носитель хотя бы одного из F_i , N_{Δ} — число F_i с носителем в Δ , d_{τ} — длина наименьшего дерева с вершинами в центрах кубов $\Delta \in \tau$.

Для доказательства нам понадобится

Лемма 4. Существуют такие α и $C(\alpha)$, что для любого набора τ попарно различных Δ и любых мономов F_{Δ} степени N_{Δ} с носителем в Δ

$$|\langle F_{\Delta}^{\tau} \rangle| \leq \frac{1}{\left(\prod_{\Delta} N_{\Delta}! \right)^{\alpha}} C(\alpha)^{\sum N_{\Delta}} e^{-d_{\tau}}. \quad (7)$$

Доказательство. Рассмотрим всевозможные разбиения F_{Δ} на множители, нумеруемые кубами $\Delta' \in \tau$

$$F_{\Delta} = \prod_{\Delta'} F_{\Delta'}^{\Delta'} \bar{F}_{\Delta'}^{\Delta'}, \quad (7')$$

где в $F_{\Delta'}^{\Delta'}$ есть только поля η , а в $\bar{F}_{\Delta'}^{\Delta'}$ — только $\bar{\eta}$.
Только

$$\langle F_{\Delta}^{\tau} \rangle = \sum \prod \langle F_{\Delta'}^{\Delta'} \bar{F}_{\Delta'}^{\Delta'} \rangle \langle \bar{F}_{\Delta'}^{\Delta'} F_{\Delta'}^{\Delta'} \rangle, \quad (8)$$

где сумма по всем связным графам G с множеством вершин τ , а произведение — по всем ребрам (Δ, Δ') графа G .

Вместо каждого множителя в правой части (8) подставим его оценку из леммы 1

$$|F_{\Delta}^{\Delta'}| \leq \sum \prod_{i=1}^2 \prod \frac{1}{(n_i(\Delta, \Delta'))^{2\alpha}} C(\alpha)^{n_i(\Delta, \Delta')} e^{-4n_i(\Delta, \Delta') \text{dist}(\Delta, \Delta')}, \quad (9)$$

где $n_i(n_1, n_2)$ — число множителей в $F_{\Delta}^{\Delta'}$ ($F_{\Delta}^{\Delta'}$).

Мы покажем, что правая часть (9) не превосходит выражения

$$\frac{1}{(\prod_{\Delta} N(\Delta))^{\alpha}} \sum \prod_{i=1}^2 \prod C(\alpha)^{n_i(\Delta, \Delta')} e^{-3n_i(\Delta, \Delta') \text{dist}(\Delta, \Delta')}. \quad (10)$$

Действительно, если в произведении \prod хотя бы одно $n(\Delta, \Delta') \geq \sqrt{N(\Delta)}$, то за счет выбора α можно вынести $\frac{1}{(N(\Delta))^{\alpha}}$ за скобку. Если же все $n(\Delta, \Delta') < \sqrt{N(\Delta)}$, то число множителей в \prod больше $\sqrt{N(\Delta)}$, и для любого Δ

$$\prod_{\Delta'} \prod_{i=1}^2 e^{-\frac{1}{2} n_i(\Delta, \Delta') \text{dist}(\Delta, \Delta')} \leq C(\alpha)^{N(\Delta)} \frac{1}{(N(\Delta))^{\alpha}}.$$

Далее обычное суммирование по графам [7] даст нужную оценку.

Для доказательства леммы 3 воспользуемся следующей формулой [100]. Пусть $\{K_a\}$ — разбиение множества $\{1, \dots, N\}$. Пусть носитель $\text{supp } F_i$ каждого F_i принадлежит некоторому единичному кубу. Обозначим для данного $K \subset \{1, \dots, N\}$

$$F_{K, \Delta} = \prod_{i: \text{supp } F_i \in \Delta, i \in K} F_i.$$

Для заданного K обозначим

$$\rho(K) = \langle F_{K, \bar{K}, \Delta} \rangle,$$

где \bar{K} — множество кубов Δ , для которых существует $i \in K$ такое, что $\text{supp } F_i \subset \Delta$. Тогда если F_i все четны, то

$$\langle F_1, \dots, F_N \rangle = \sum_{\{K_a\}}' \mu(G(\{K_a\})) \prod_a \rho(K_a), \quad (11)$$

где сумма по всем разбиениям таким, что граф $G = G(\{K_a\})$ связан. Вершинами G являются блоки K_a , между K_a и $K_{a'}$ есть ребро тогда и только тогда, когда $K_a \cap K_{a'} \neq \emptyset$. При этом

$$\mu(G) = \sum_{\Gamma} (-1)^{|\Gamma|}, \quad (12)$$

где сумма по всем связным подграфам G с тем же множеством вершин, что и G , $|\Gamma|$ — число ребер Γ .

Для доказательства (11) заметим, что

$$\langle \prod_{i=1}^N F_i \rangle = \sum_{\{K_a\}} \left[\prod_a \rho(K_a) \right] \left[\prod_{\{a, a'\}} A(K_a, K_{a'}) \right], \quad (13)$$

где произведение по всем неупорядоченным парам $a \neq a'$ и $A(K_a, K_{a'}) = 1$, если $K_a \cap K_{a'} = \emptyset$ и 0 в противном случае. Разлагая в (13) $\prod A = \prod (1 + (A - 1))$, мы получаем (11), например, сравнивая диаграммы в левой и правой частях (11) (таким же сравнением доказывається и (13)).

Доказательство леммы 3. Воспользуемся тем, что $|\mu(G)|$ не превосходит числа связанных поддеревьев G с тем же множеством вершин [5]. Для каждого Δ упорядочим множество A_Δ всех F_i с $\text{supp } F_i \subset \Delta$ и разобьем A_Δ на отрезки-блоки. Это даст $\prod 2^{N_\Delta} N_\Delta!$ способов. Мы рассмотрим теперь множество \mathfrak{A} всех связанных деревьев, множеством V вершин которых являются блоки разбиений всех A_Δ . Каждому дереву из \mathfrak{A} поставим в соответствие пару $\{K_a\}$, Γ следующим образом. Упорядочим V следующим образом: упорядочим $\{\Delta\}$ хронологически, а внутри Δ уже есть порядок. Возьмем первую вершину $v \in V$ и некоторое дерево, содержащее v и такое, что все его вершины принадлежат разным Δ . Ему отвечает некоторое множество K_1 . Далее из первой вершины K_1 (а именно из v) решаем вести или не вести ребро во вторую вершину v_2 из Δ . Если ведем, то объявляем это ребро ζ_1 ребром из Γ и строим из v_2 аналогично множество K_2 . Если не ведем, то переходим к следующей по порядку вершине K_1 и с ней повторяем то же самое.

Таким образом мы получим последовательность $K_1, \zeta_1, K_2, \zeta_2, \dots$, т. е. пару $\{K_a\}, \Gamma = \{\zeta_i\}$.

Произвол в выборе K_i учитывается стандартным суммированием по деревьям, произвол в выборе ζ_i дает множитель $2^{|\zeta_i|}$. Если мы уже построили K_1, K_2, \dots, K_n , то построение ζ_n начинаем с первой из уже построенных вершин такой, что мы еще не решали раньше, строить ли из нее ζ_i .

§ 3. Итерация ренормгруппы Вильсона в окрестности гауссовой неподвижной точки

Линеаризация или линейная ренормгруппа. Напомним, что v_1 неподвижна относительно W . В приближении первого порядка по λ $\tilde{U}_{\text{эфф}}$ равно

$$\lambda W_1(U) \stackrel{\text{def}}{=} \langle \lambda \tilde{U}(M^{-a} \xi(M^{-1}x) + \eta(x)) \rangle_\eta, \quad (1)$$

что очевидно из (12.1), т. е. на взаимодействие действует ультрафиолетовый скейлинг.

При всех k члены ряда для $\tilde{U}_{\text{эфф}}$ имеют вид

$$\text{const} \int G(x_1, \dots, x_k) A_1(x_1) \dots A_k(x_k) dx_1 \dots dx_k, \quad (2)$$

где

$$A_p(x_p) = M^{-an_p} \cdot \prod_{i=1}^{n_p} \xi^{(\alpha_i^{p_i})} (M^{-1}x_p):.$$

При этом n_p может равняться нулю; тогда $A_p \equiv 1$. В (2) G — некоторая связанная диаграмма без свободных отростков с пропагаторами $\langle \eta_{\beta_i}^{(\alpha_i)}(x_i) \eta_{\beta_j}^{(\alpha_j)}(x_j) \rangle$, а интегрирование ведется по x_2, \dots, \dots, x_n — по всему R^v , а по x_1 — по конечному объему Λ , или формально по R^v . Если учесть, что $G(x_1, \dots, x_k) = \hat{G}(x_2 - x_1, \dots, x_k - x_1)$, то (2) можно переписать в виде

$$\text{const} M^{\nu - \sum_p \left(an_p + \sum_{i=1}^{n_p} \alpha_i^p \right)} \int_{M^{-1}\Lambda} dy_1 d(M(y_2 - y_1)) \dots d(M(y_k - y_1)) \times \\ \times \hat{G}(M(y_2 - y_1), \dots, M(y_k - y_1)) \prod_{p=1}^k : \prod_{i=1}^{n_p} \xi^{(\alpha_i^p)}(y_p) :. \quad (3)$$

Особую роль играют локальные члены, т. е. $k=1$. Они являются «собственными векторами» линейной ренормгруппы (1). Их «собственные значения» (спектр линейной ренормгруппы) равны

$$M^{\nu - an - \sum_{i=1}^n \alpha_i}, \quad \text{где } n = n_1. \quad (4)$$

Это определение является формальным, так как интегрирование по x_1 формально по R^v . Если же интегрировать по конечному объему, то надо учитывать изменение объема при замене переменной.

Удобно считать, что ренормгруппа действует на пространстве дифференциальных форм

$$: \prod \xi^{(\alpha_i)}(x) : dx,$$

$$G(x_1, \dots, x_k) A(x_1) \dots A(x_k) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k.$$

Если собственное значение (4) больше 1, то вектор $: \prod_{i=1}^n \xi^{(\alpha_i)}(x) : dx$ или соответствующее переменное $a_{\alpha_1 \dots \alpha_k}$ называется существенным; если меньше 1, то несущественным, и если равно 1, то безразличным.

Если $a > 0$, то число существенных или безразличных переменных конечно. Далее это всегда предполагается.

Асимптотическая свобода. Ясно, что инфракрасный скейлинг тесно связан с ренормгруппой Вильсона. Поэтому формально ИАС может возникнуть, если нет существенных неквадратичных векторов. Если взять $d=0$ и рассматривать только четные векторы, это значит, что $\nu \leq 2$ ($\nu = 2(1+\varepsilon)$) (равенство достигается при $\alpha_i \equiv 0$, $n=4$). Поэтому при $\varepsilon=0$ надо исследовать следующий порядок по λ . (Например, при $\nu=4$; см. ниже). УАС удобно объяснять, применяя другое разбиение на моды:

$$\tilde{C}_k(p) = \tilde{C}(p) \chi_{[M_{k-1}, M_k]}(p). \quad (5)$$

В этом случае \mathfrak{A}_N принадлежит самой \mathfrak{A} и для любого состояния μ и $\mu' = R_M^* \mu$ (инфракрасный скейлинг)

$$(\mu')^n = R_M^* (\mu^{n-1}) \quad (6)$$

и, значит,

$$(\tilde{\mu}')^n = \tilde{\mu}^{n-1} = W \tilde{\mu}^n. \quad (7)$$

Из (7) следует, что ультрафиолетовый скейлинг $R_{M^{-1}}^*$ есть операция, в некотором смысле обратная к W , если ее рассматривать на эффективных мерах.

Поэтому, если состояние является УАС, то затравочные меры $\tilde{\mu}^{N,N}$ при $N \rightarrow \infty$ должны стремиться к гауссовой мере, так как

$$W^{N-n} \tilde{\mu}^{N,N} = \tilde{\mu}^{N,n} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \tilde{\mu}^n. \quad (8)$$

Стратегия построения моделей евклидовой теории поля состоит таким образом в том, чтобы выбрать $\tilde{\mu}^{N,N}$ достаточно близко к гауссовой неподвижной точке так, чтобы существовал предел (8). Система мер $\tilde{\mu}^n$ полностью определит искомую меру μ . Действительно, условие согласования мер μ^n переходит в условие

$$\tilde{\mu}^n = W(\tilde{\mu}^{n+1}), \quad (8')$$

которое при построении $\tilde{\mu}^n$ следует из (8), и, наоборот, условие (8') дает согласованность мер μ^n , что следует из (6) и (7). Условие нетривиальности предела и OS-положительность налагает условия на существенные и безразличные переменные. В частности, теория не может быть ИАС. При этом в $\tilde{U}^{N,N}$ берутся только локальные существенные или безразличные члены.

Зоология диаграмм и дополнительные пересуммирование при итерации. Удобно представлять члены (2)–(3) как диаграммы с отростками (см. [7], стр. 56). При итерации формулы (12.1) снова возникнут диаграммы с отростками. Диаграмму после k -й итерации будем называть существенной, безразличной или несущественной в зависимости от того, что число $\tilde{\omega} = \nu - aN - N$

больше, равно или меньше нуля. Здесь N — число свободных отростков в диаграмме, \hat{N} — сумма порядков производных у этих отростков. Это определение оправдывается тем, что предел итерации линейной ренормгруппы (1), т. е. R_{M-n} при $n \rightarrow \infty$, при действии на несущественную диаграмму равен нулю.

На каждом шаге итерации мы будем дополнительно перестраивать ряд теории возмущений. Пусть уже сделана k -я итерация. Перед $(k+1)$ -й итерацией сделаем переупорядочивание Вика: в каждой существенной или безразличной диаграмме сделаем замену

$$:\xi_{T_1} : \dots : \xi_{T_k} : = \Sigma I(G), \quad (9)$$

где в обозначениях [7, стр. 56] сумма берется по всем диаграммам G вида (1, β) таким, что каждый двухточечный блок разбиения β не принадлежит ни одному T_j . Иначе говоря, произведение виковских мономов заменяется на их сумму. Возникающие при этом ребра называются виковскими, в отличие от η -ребер, в $G(x_1, \dots, x_k)$. Иногда удобно делать виковское переупорядочивание и для некоторых несущественных диаграмм.

Еще одной перестройкой будет выделение локальных членов: после виковского переупорядочивания каждый виковский моном с $\hat{\omega} \geq 0$ разложим по формуле Тейлора до порядка $\hat{\omega} + 1$

$$\begin{aligned} \Phi(x_1, 1) = & \Phi(x_1, 0) + \dots + \frac{1}{\hat{\omega}!} \frac{\partial^{\hat{\omega}} \Phi(x_1, 0)}{\partial t^{\hat{\omega}}} + \\ & + \frac{1}{(\hat{\omega} + 1)!} \int_0^1 \frac{\partial^{\hat{\omega} + 1} \Phi(x_1, t)}{\partial t^{\hat{\omega} + 1}} dt, \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\Phi(x_1, t) = \xi^{(\beta_1)}(x_1) \xi^{(\beta_2)}(x_1 + t(x_2 - x_1)) \dots \xi^{(\beta_k)}(x_1 + t(x_k - x_1)).$$

Таким образом, после каждого шага итерации у нас останется сумма существенных или безразличных локальных членов и несущественных локальных и нелокальных членов. Первых всегда конечное число, мы их занумеруем и обозначим коэффициент перед i -м существенным или безразличным членом перед $(k+1)$ -й итерацией через $a_i^{(k)}$.

В фермионном случае мы докажем, что, ввиду сходимости рядов, преобразование

$$S_k : \{a_i^{(0)}\} \rightarrow \{a_i^{(k)}\}$$

является диффеоморфизмом. Грубо говоря, задача теперь сводится к двум: изучить сходимость S_k как задачу близкую к исследованию фазовых траекторий конечной системы обыкновенных дифференциальных уравнений и с помощью кластерных разложений доказать сходимость остальных членов.

Полезно визуализовать диаграммы на данной итерации. В каждой содержатся свободные отростки и ребра. Будем говорить, что ребро имеет ранг k , если оно возникло на k -й итерации. Пусть G_{1p} — связанные компоненты графа (на вершинах диаграммы G), образованного ребрами ранга 1, $\mathcal{F}_{1p} \subset G_{1p}$ — некоторое максимальное связное поддерево графа G_{1p} ; далее в факторграфе $G/\{G_{1p}\}$ выделим связанные компоненты G_{2p} ребер ранга 2 и т. д.

Произвольная диаграмма на n -м шаге итерации имеет вид (если в ней нет, для простоты, виковских ребер и без учета интегрирования по t в (10))

$$\left[\prod_{k=1}^n M^{a_k} \right] \int dy_i \left[\prod_{\zeta} C_1(M^{n-k(\zeta)+1}(y_i - y_j)) \right] \quad (11)$$

$$\left[\prod_{v=1}^V : \prod_{i=1}^{n_v} \xi^{(\alpha_i)}(y_v) : \right] \left[\prod'_{\zeta} d(iM^{n-k(\zeta)+1}(y_i - y_j)) \right],$$

где M^{a_k} — множитель как в (2), появляющийся из-за скейлинга (линейной ренормгруппы) на k -м шаге итерации; произведение \prod берется по всем ребрам ζ , y_i, y_j — вершины ζ ; $k(\zeta)$ — ранг ребра ζ , V — число вершин диаграммы; $C_1(x-y)$ — один из конечного числа пропагаторов вида $\langle \eta^{(\alpha)}(x) \eta^{(\beta)}(y) \rangle$; \prod' берется по всем $\zeta \subset \bigcup_{k,p} \mathcal{F}_{kp}$; n_v — число свободных отростков из вершины v .

Кластерное разложение урезанных статсумм с помощью ренормгруппы. Если мы рассматриваем гиббсову перестройку меры v^1 , то урезанной статсуммой в объеме Λ назовем

$$Z_{N,\Lambda} = \langle \exp \left(-\tilde{U} \left(\sum_{k=-N}^1 \xi_k(x) \right) \right) \rangle_{\Lambda, v^1}. \quad (12)$$

Заметим, что

$$Z_{N,\Lambda} = \langle SR_{M^{-1}} \langle \exp \left(-\tilde{U} \left(\eta + \sum_{k=-N}^0 \xi_k(x) \right) \right) \rangle_{\eta} \rangle_{v^1}. \quad (13)$$

Поэтому если при итерации ренормгруппы мы имеем хороший контроль над эффективным взаимодействием, то можно надеяться получить обычное [7] кластерное представление статсумм $Z_{N,\Lambda}$ с кластерной оценкой, равномерной по N . Отсюда стандартной техникой получаются аналитические свойства свободной энергии при снятых урезаниях $N \rightarrow \infty$, $\Lambda \uparrow R^v$.

Пусть $\mu_{N,\Lambda}$ — состояние с объемным урезанием Λ и импульсным урезанием N . Мы увидим далее, что аналогично получается

доказательство существования предельного состояния

$$\tilde{\mu} = \lim_{\Lambda \uparrow R^v} \lim_{N \rightarrow \infty} \tilde{\mu}_{N, \Lambda}.$$

§ 4. Сверхперенормируемая ИАС фермионная модель

Основные приемы доказательства сходимости легко понять на следующем примере. Рассмотрим гауссово ферми-поле на R^v , $v > 4$, с компонентами $\bar{\psi}_1(x)$, $\psi_1(x)$, $\bar{\psi}_2(x)$, $\psi_2(x)$ и ковариацией

$$\langle \bar{\psi}_i(x) \psi_j(y) \rangle = \text{const } \delta_{ij} \int \frac{\exp(ip(x-y)) dp}{p^2 + m^2}. \quad (1)$$

Иначе говоря, его лагранжиан имеет вид

$$m^2 \bar{\psi}(x) \psi(x) + \nabla \bar{\psi}(x) \nabla \psi(x), \quad (2)$$

где, например, $\bar{\psi} \psi = \bar{\psi}_1 \psi_1 + \bar{\psi}_2 \psi_2$.

Мы будем рассматривать перестройки этого поля лагранжианом $\lambda(\bar{\psi}\psi)^2$. Это поле не является OS-положительным, но во многом сходно с моделью $:\Phi^4:_{\nu}$. Простота рассматриваемой модели определяется сходимостью разложений в фермионном случае как при $\lambda > 0$, так и при $\lambda < 0$.

Замечание 1. Если поле $\xi(x)$ имеет распределение ν^1 , которое неподвижно относительно W , то и поле $\hat{Z}\xi(x)$ неподвижно относительно W . Таким образом, всегда имеется неподвижная прямая. \hat{Z} называется перенормировкой величины поля.

Теорема 1. Пусть $v > 4$. Тогда для всех достаточно малых $|\lambda|$ существует $m^2 = m_{\text{crit}}^2(\lambda)$ такое, что предельная гиббсовская перестройка меры ν^1 вида

$$\frac{d\mu}{d\nu^1} = \exp(-U), \quad U = \lambda \int [:(\bar{\psi}\psi)^2: + m^2 \bar{\psi}\psi] dx$$

существует и сходится при применении W^k , $k \rightarrow \infty$, к гауссово автомодельному полю с некоторой конечной перенормировкой волновой функции $Z(\lambda) \nabla \bar{\psi} \nabla \psi$.

При этом $m_{\text{crit}}^2(\lambda)$, $\hat{Z}(\lambda)$ являются аналитическими по λ , а урезанные статсуммы допускают кластерное представление с равномерными кластерными оценками.

Исследуем сначала приближенно диффеоморфизмы S_k в пространстве $R^L = \{a_i\}$, где a_i — все существенные или безразличные переменные, L — их число.

Замечание 2. Число L может быть уменьшено: часто можно доказать с помощью некоторых соображений симметрии, что некоторые существенные или безразличные переменные не могут появиться в процессе итерации, если их не было в исходном взаимодействии. Например,

1) если степень каждого монома четна, то это свойство сохраняется;

2) если пропагаторы полей четны по x и если \dot{N} четно в исходном взаимодействии, то можно не рассматривать, например, локальных членов вида $\bar{\psi}\nabla\psi$. Действительно, в диаграмме, являющейся коэффициентом, число нечетных из-за производных пропагаторов нечетно. Тогда преобразование $x_i \rightarrow -x_i$ для всех i показывает, что этот коэффициент равен нулю;

3) киральные симметрии и симметрии типа теоремы Фарри в квантовой электродинамике (см. [100]).

В соответствии с замечанием 2.2 и 2.3 (инвариантность относительно внутренних ортогональных преобразований $\psi \rightarrow O\psi$, $\bar{\psi} \rightarrow O^*\bar{\psi}$), в нашем случае надо рассматривать переменные $\bar{\psi}\psi$, $\nabla\bar{\psi}\nabla\psi$, с собственными значениями M^2 , 1 (заметим, что $(\bar{\psi}\psi)^2$ имеет собственное значение $M^{4-\nu}$).

Временно обозначим переменные, соответствующие $\bar{\psi}\psi$ и $(\bar{\psi}\psi)^2$ через m^2 и λ соответственно. В линейном приближении на плоскости (m^2, λ) фазовые траектории имеют вид

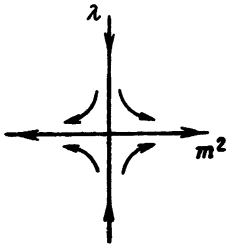


Рис. 1а ($\nu > 4$)

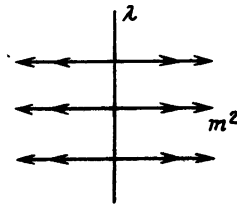


Рис. 1б ($\nu = 4$)

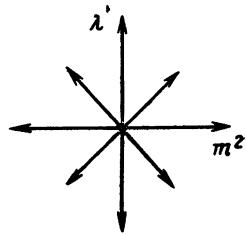


Рис. 1с ($\nu < 4$)

В линейном приближении рис. 1а $m^2_{crit}(\lambda) = 0$. Обсудим, как найти $m^2(\lambda)$ в общем случае (так называемая проблема тонкой настройки).

Будем строить $m^2(\lambda)$ в виде ряда по λ

$$m^2(\lambda) = \sum_{k=2}^{\infty} c_k \lambda^k. \quad (3)$$

Для данного взаимодействия U через $U^{(n)}$ обозначим его вид после n -й итерации. Определим $c_2^{(1)}$ из условия

$$\left(U + c_2^{(1)} \lambda^2 \int \bar{\psi}\psi dx \right)^{(1)} = O(\lambda^3)$$

и т. д. по индукции потребуем, чтобы было выполнено следующее $(N-1)$ -условие

$$\left(U + \sum_{k=2}^N c_k^{(N-1)} \lambda^k \int \bar{\psi}\psi dx \right)^{(N-1)} = O(\lambda^{N+1}) \quad (4)$$

для всех N . На данном шаге для некоторых членов η -ребра могут возникать и без спаривания различных членов (т. е. в одном члене). N -условие определяет $c_k^{(N-1)}$ в виде конечной суммы некоторых диаграмм. При заданном k последовательность $c_k^{(N)}$ стабилизируется к c_k .

Докажем теперь сходимость ряда (3), сходимость

$$\left(U + m^2(\lambda) \int \bar{\psi} \psi dx \right)^{(N)} \rightarrow Z(\lambda) \nabla \bar{\psi} \nabla \psi,$$

где $Z(\lambda)$ — аналитическая функция от λ .

Оценка $\left| \sum_G I(G) \right| \leq \sum_G |I(G)|$ плоха уже для доказательства сходимости $U^{(1)}$, и мы должны учесть сокращения диаграмм: объединить диаграммы в семиинварианты. Фиксируем точки y_1, \dots, y_V в подынтегральном выражении (10.3). Каждой точке y_i сопоставлено не более 4 отростков вида $\eta^{(\alpha)}(y_i)$ или $\eta^{(\alpha)}\left(\frac{y_i}{M^\nu}\right)$, $\nu > 0$.

После их соответствующих спариваний и возникает диаграмма. Рассмотрим все диаграммы (y_1, \dots, y_V все время фиксированы) с заданными, подлежащими спариванию, отростками, но различными спариваниями, причем условимся считать, что каждому отростку сопоставлены ранги, по которым однозначно определяются числа γ , и спариваться могут лишь отростки с одинаковыми рангами k и числами γ . Это несколько меняет ковариацию, но оценки § 2 справедливы и для такой измененной ковариации.

В то же время заметим, что если ребрú приписан ранг k , то оба его отростка за k итераций ренормгруппы приобретут множитель $M^{-\varepsilon k}$, где ε — константа для данной модели. Поэтому приписывание рангов ребрам дает множитель

$$1 + M^{-\varepsilon} + M^{-2\varepsilon} + \dots$$

на каждый отросток, т. е. $(C(M))^\nu$. Будем считать поэтому, что каждому отростку уже приписаны ранги и числа $\gamma = 0, 1, \dots$ (метод комбинаторных множителей).

Обозначим множество отростков с данными γ через \mathfrak{A}_γ . Любая диаграмма, полученная спариванием отростков из \mathfrak{A}_0 , связана, и любая такая связанная диаграмма возможна. Сумма всех таких диаграмм дает семиинвариант соответствующих мономов. Заметим, что диаграммы из $\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \dots$ можно суммировать независимо. Сумма диаграмм из \mathfrak{A}_γ для каждого $\gamma \geq 1$ дает момент соответствующих мономов.

Обозначим $F_{kp}(G)$ связанные компоненты в диаграмме G , получающиеся после стирания в G всех ребер рангов, больших k . Назовем m -диаграммой и Z -диаграммой любую диаграмму со свободными отростками вида $\bar{\psi}(x)\psi(x)$ или $\nabla \bar{\psi}(x)\nabla \psi(x)$ соот-

ветственно. Z -диаграмму назовем (Z, k) -диаграммой, если в ней нет ребер ранга большего k , и если есть ребра ранга k .

Рассмотрим сначала те диаграммы G после n -й итерации, у которых ни одна из $F_{kp}(G)$ не является ни m -диаграммой ни Z -диаграммой. Это свойство не расщепляет множество \mathfrak{A}_0 .

Семиинвариант, соответствующий \mathfrak{A}_0 , имеет оценку вида $\exp(-d(y_1, \dots, y_N))$, где $d(y_1, \dots, y_N)$ — длина наименьшего связного дерева на точках y_1, \dots, y_N (и возможно других). Оценка моментов для \mathfrak{A}_γ , $\gamma > 1$, может дать лишь множитель C^N (если применить лемму 1 § 2 с разбиением на кубы со стороной $M^{-\gamma}$). В то же время имеется еще множитель λ^N , и если $N < n$, то $M^{-\varepsilon(n-N)}$. Выбирая теперь сначала M достаточно большим, а затем λ достаточно малым, мы получим экспоненциальное по n убывание нормы взаимодействия (без интегрирования по y_i , т. е. y_i фиксировано), а норма вводится как абсолютное значение коэффициента перед фиксированным произведением виковских мономов.

Среди m -диаграмм после n -й итерации выживают только те, которые имеют порядок $O(\lambda^n)$. При этом выбором λ можно компенсировать расходящийся множитель, происходящий из линейной ренормгруппы. Поэтому и здесь оценка нормы такая же.

Нетрудно видеть также, что сумма всех (Z, k) -диаграмм с $k \leq n$ дается сходящимся рядом, который в пределе $n \rightarrow \infty$ и определяет $Z(\lambda)$.

Из этих рассуждений получаются очевидным образом равномерные кластерные оценки в кластерном представлении урезанных статсумм. Теорема 1 доказана.

Вместо $(\bar{\psi}\bar{\psi})^2$ можно рассматривать любую степень $(\bar{\psi}\bar{\psi})^n$. Метод доказательства теоремы 1 дает полную информацию о состоянии только в критической точке, т. е. для $m^2 = m_{\text{crit}}^2(\lambda)$. Сейчас мы покажем, как получить аналогичную информацию для случая $m^2 > m_{\text{crit}}^2(\lambda)$.

Теорема 2. Если $m^2 > m_{\text{crit}}^2(\lambda)$, то ренормгруппа Вильсона при действии на такое поле сходится к нулю.

Доказательство этой теоремы во многом аналогично доказательству теоремы 1 и также приводит к кластерному разложению для урезанных статистических сумм. Мы укажем на основные изменения в доказательстве. Рассмотрим сначала гиббсовскую перестройку гауссовой меры $\nu^1(\hat{m}^2)$ с ковариацией $\frac{\exp(-p^2)}{\hat{m}^2 + p^2}$.

Тогда ξ_k имеет ковариацию

$$\frac{1}{\hat{m}^2 + p^2} (\exp(-M^{2(k-1)}p^2) - \exp(-M^{2k}p^2)). \quad (5)$$

При итерации ренормгруппы Вильсона (мы используем формулу $\langle A \rangle_\mu = \langle R_s^{-1}A \rangle_{R_s^*\mu}$) на k -м шаге итерации $\eta(x)$ имеет

ковариацию

$$\frac{1}{M^{k-1}\hat{m}^2 + p^2} (\exp(-p^2) - \exp(-M^2 p^2)).$$

Подбирая массу с помощью (4), мы получим функцию $m^2(\lambda, \hat{m}^2)$. Тогда, очевидно, теорема 2 верна для меры

$$\frac{d\mu}{d\nu^1(\hat{m}^2)} = \exp\left(-\lambda \int (\bar{\psi}\psi)^2 dx - m^2 \int \bar{\psi}\psi dx\right)$$

с $m^2 = m^2(\lambda, m^2)$, так как эффективное взаимодействие стремится к нулю и ковариация гауссовой меры стремится к нулю, как

$\frac{1}{M^{k-1}\hat{m}^2 + p^2} \exp(-p^2)$, $k \rightarrow \infty$. Чтобы доказать теорему 2 для любого $m^2 > m_{\text{crit}}^2(\lambda)$, найдем сначала \hat{m}^2 такое, что

$$\hat{m}^2 + m^2(\lambda, \hat{m}^2) = m^2. \quad (6)$$

Заметим, что $m^2(\lambda, \hat{m}^2)$ непрерывно зависит от \hat{m}^2 , $m^2(\lambda, 0) = m_{\text{crit}}^2(\lambda)$ и $m^2(\lambda, \hat{m}^2) \rightarrow 0$ при $\hat{m}^2 \rightarrow \infty$. Отсюда следует существование решения у (6). Далее для данного m^2 следовало бы соответствующее \hat{m}^2 «перенести в ковариацию», а во взаимодействии оставить $m^2(\lambda, \hat{m}^2)$. Дело осложняется тем, что при переносе \hat{m}^2 в ковариацию возникнет не $\frac{1}{\hat{m}^2 + p^2} \exp(-p^2)$, а другая ковариация $\frac{\exp(-p^2)}{\hat{m}^2 \exp(-p^2) + p^2}$. При этом ξ_k имеет ковариацию

$$\frac{\exp(-M^{2(k-1)} p^2) - \exp(-M^{2k} p^2)}{\hat{m}^2 \exp(-p^2) + p^2},$$

а $\eta(x)$ на s -м шаге

$$\frac{\exp(-p^2) - \exp(-M^2 p^2)}{M^{2s} \hat{m}^2 \exp\left(-\frac{p^2}{M^{2s}}\right) + p^2}.$$

Аналогичные рассуждения, как нетрудно видеть, применимы и в этом случае. Теорема 2 доказана.

§ 5. Сверхперенормируемая УАС фермионная модель

Рассмотрим модель предыдущего параграфа для $\nu = 3$. В этом случае есть ровно 2 существенных вектора $\bar{\psi}\psi$ и $:(\bar{\psi}\psi)^2:$ с собственными значениями M^2 и M . Рассмотрим затравочную меру вида

$$\frac{d\tilde{\mu}^{N,N}}{d\nu^1} = \exp\left(-m^2 M^{-2N} \int \bar{\psi}\psi dx - \lambda M^{-N} \int :(\bar{\psi}\psi)^2: dx\right). \quad (1)$$

Мы хотим доказать (для достаточно больших n — чтобы оставаться в зоне действия кластерных разложений) существование пределов

$$\tilde{\mu}^n = \lim_{N \rightarrow \infty} W^{N-n} \tilde{\mu}^{N,N}$$

и

$$\tilde{U}^n = \lim_{N \rightarrow \infty} \tilde{U}^{N,n}. \quad (2)$$

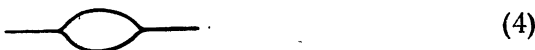
Выбор коэффициентов M^{-2N} и M^{-N} понятен: надо чтобы существовал предел в линейном приближении.

Если выбрать m^2 константой, то оказывается, что массовый член (как более сингулярный) может быстро расти.

Теорема 1. Существует такая константа $a(M)$, что для любого m_0^2 существуют пределы (2) при

$$m^2 = m_0^2 + \lambda^2 a(M) (N - n_0). \quad (3)$$

Доказательство. Мы поясним, почему возможна «грубая» подстройка массы в отличие от тонкой подстройки в инфракрасном случае и в теореме Боголюбова—Парасюка. Масса может возникнуть на первом шаге после виковского перепорядочивания и выделения локальных членов в диаграмме



где хотя бы одно из ребер является η -ребром, остальные ребра — виковские. Иначе говоря, во взаимодействии возникает член

$$(-\lambda)^2 M^{-2N} a \int \bar{\psi} \psi dx,$$

где $a = a(M)$ равно сумме значений диаграмм (4). Легко видеть что на первом шаге остальные члены имеют множитель M^{-sN} с $s \geq 3$.

Аналогично на k -м шаге возникнет

$$(-\lambda)^2 M^{-2(N-k)} a \int \bar{\psi} \psi dx. \quad (5)$$

Член (5) за $N - n - k$ шагов линейной ренормгруппой переводится в

$$(-\lambda)^2 M^{-2n} a \int \bar{\psi} \psi dx.$$

Возникнет ровно $N - n$ таких членов и для их сокращения мы и должны ввести «контрчлен» в (3). Далее алгоритм доказательства существования предела \tilde{U}^n взаимодействий $\tilde{U}^{N,n}$ в точности такой же, как в § 4.

Замечание 1. Статистическую сумму для $\mu^{N,N}$ так оценить нельзя. Действительно уже диаграмма Θ расходится на первом шаге. Поэтому если не вводить вакуумных контрчленов, то получающиеся расходящиеся константы надо отбрасывать.

§ 6. Большие значения поля в бозонных моделях

Для бозонных моделей ряды по семиринвариантам, о которых шла речь в предыдущих параграфах, расходятся и необходимо изменение разложений. Мы здесь для примера рассмотрим модель φ^4_3 и используем методы § 5 главы 1.

Рассмотрим затравочную меру вида

$$\frac{d\tilde{\mu}^{N,N}}{d\nu^1} = Z_\Lambda^{-1} \exp \left(-\lambda M^{-N} \int_\Lambda \varphi^4(x) : dx - (m_0^2 + \lambda^2 a(M)(N - n_0)) \cdot M^{-2N} \int_\Lambda \varphi^2(x) : dx + U^{\text{вак}} \right), \quad (1)$$

где Λ — куб со стороной M^N , $U^{\text{вак}}$ будет определен позже, ν^1 — гауссова мера с ковариацией $\frac{1}{p^2} \exp(-p^2)$.

Мы докажем сходимость статистических сумм Z_Λ при $N \rightarrow \infty$ (аналогично доказывается сходимость производящих функционалов). Обозначим взаимодействие под экспонентой в (1) через $-U$. Тогда

$$Z_\Lambda = \langle \langle \exp \left(-U \left(M^{-a\varphi} \left(\frac{x}{M} \right) + \eta(x) \right) \right) \rangle \rangle_\varphi. \quad (2)$$

Как и в § 5.1, введем случайное множество

$$E = \left\{ x \in \Lambda : M^{-a} \left| \varphi \left(\frac{x}{M} \right) \right| > (N-1)^q \right\}, \quad q > 1. \quad (3)$$

Известно, что E имеет гладкую границу. Пусть Q_1 — разбиение R^3 на единичные кубы, $\Gamma \subset Q_1$ — конечное множество таких кубов. Обозначим через B случайное подмножество

$$B = \left\{ x \in E : \left| \eta(x) \right| > \frac{1}{2} (N-1)^q \right\} \quad (4)$$

и через Γ событие, состоящее в том, что $\{\Delta \in Q_1 : B \cap \Delta \neq \emptyset\} = \Gamma$. Тогда

$$p(\Gamma) \leq \exp \left(-(N-1)^2 |\Gamma| \right). \quad (5)$$

Аналогично введем

$$D = \left\{ x \in \Lambda : M^{-a\varphi} \left(\frac{x}{M} \right) + \eta(x) > \frac{1}{2} (N-1)^q \right\}. \quad (6)$$

Так же, как в § 5.1, мы сводим оценку статсуммы к множеству $\Lambda \setminus (D \cup E)$ и на этом множестве используем разложение для $p_0 = 4$

$$\langle \exp(-U) \rangle_{\eta} = \exp \left(\sum_{k=1}^3 \frac{(-1)^k}{k!} \right) \langle U^k \rangle_{\eta} + \frac{1}{4!} \langle U^4 \rangle_{\eta, t},$$

$$0 \leq t \leq 1, \quad (7)$$

$$\langle \cdot \rangle_{\eta, t} = \frac{\langle \cdot \exp(-tU) \rangle_{\eta}}{\langle \exp(-tU) \rangle_{\eta}}.$$

Далее все так же, как в § 5.1, за исключением того, что применяется кластерное разложение для оценки $\langle U^4 \rangle_{\eta, t}$. Можно использовать, например, разложение, аналогичное разложению § 7 главы 4 [7] (см. следующий параграф).

Мы не будем более подробно останавливаться на этом. В опубликованных работах применяется решетчатый вариант этого подхода, где кластерное разложение для $\langle U^4 \rangle_{\eta, t}$ несколько проще (что связано с конечностью числа степеней свободы в каждом кубе). Однако никакой принципиальной разницы нет. Заметим тем не менее, что описанный метод не применим для несверхперенормируемых взаимодействий. Здесь надо перейти к рассмотрению эффективных взаимодействий или корреляционных функций и менять соответственно кластерные разложения на каждом шаге.

Глава 3

ДОПОЛНЕНИЯ

§ 1. Возмущение гауссова поля на R^v

Рассмотрим трансляционно-инвариантное непрерывное гауссово поле $\xi(x)$ на R^v с ковариацией, удовлетворяющей условию

$$\int_{R^v} | \langle \xi(0) \xi(x) \rangle | dx < \infty. \quad (1)$$

Поле $\eta(x)$ из § 6.2 заведомо принадлежит этому классу.

Теорема 1. Если $P(y)$ — ограниченный снизу многочлен, то для достаточно малых $\lambda > 0$ существует кластерное разложение мер

$$\frac{d\mu_{\Lambda}}{d\mu_0} = Z_{\Lambda}^{-1} \exp(-\lambda U_{\Lambda}), \quad (2)$$

$$U_{\Lambda} = \int_{\Lambda} : P(\xi(x)) : dx.$$

Для доказательства мы получим кластерное представление статсумм

$$Z_{\Lambda} = \sum c^{|\Lambda \cap Z^v \setminus (\Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_n)|} k_{\Gamma_1} \dots k_{\Gamma_n}; \quad (3)$$

где сумма по наборам попарно непересекающихся подмножеств $\Gamma_i \subset \Lambda \cap Z^v$. Если $\{\Delta\}$ — система единичных кубов с центрами в точках Z^v , то для $t \in Z^v$

$$c \equiv c_t = \left\langle \exp \left(-\lambda \int_{\Delta_t} : P(\xi(x)) : dx \right) \right\rangle_0, \quad (4)$$

где Δ_t — единичный куб с центром в t .

Числа k_{Γ} определяются почти дословно так же, как в § 7.4 [7], и мы укажем лишь необходимые изменения.

Пусть $f_t, t \in \Lambda \cap Z^v$, — функционалы, имеющие вид

$$f_t = \left[\prod_i \left(\int_{\Delta_t} : P^{(\alpha_i)}(\xi(x)) : dx \right) \right] \exp \left(-\lambda \int_{\Delta_t} : P(\xi(x)) : dx \right). \quad (5)$$

Тогда вместо формулы 4.7.4 [7] имеем

$$\begin{aligned} \left\langle \prod_{t \in \Lambda} f_t \right\rangle_0 &= \left\langle f_{t_0} \right\rangle_0 \left\langle \prod_{t \in \Lambda \setminus \{t_0\}} f_t \right\rangle_0 + \\ &+ \int_0^1 ds \left[\sum_{t_i \in \Lambda \setminus \{t_0\}} \int_{\Delta_{t_0}} \int_{\Delta_{t_i}} dx dy \langle \xi(x) \xi(y) \rangle_0 \right] \cdot \\ &\left\langle \left[\prod_{t \in \Lambda \setminus \{t_0, t_i\}} f_t \right] \frac{\delta f_{t_0}}{\delta \xi(x)} \frac{\delta f_{t_i}}{\delta \xi(y)} \right\rangle_{\{t_0, s\}}, \end{aligned} \quad (6)$$

которая следует из формулы интегрирования по частям (23.2.2) [7], если в (5) заменить интегралы римановыми суммами. При этом в формуле 3.7.4 [7], $C_{tt'}$ не числа, а ядра $C_{tt'}(x-y), x \in \Delta_t, y \in \Delta_{t'}$.

Вместо 6.7.4. [7] будем иметь

$$\begin{aligned} k_B &= \sum_{\tau} \left[\prod_{m=1}^n \int_{\Delta} dx \int_{\Delta'} dy \langle \xi(x) \xi(y) \rangle_0 \right] \times \\ &\times \int_0^1 \Phi(\tau, s) \left\langle \frac{\delta}{\delta \xi_{\tau}} \prod_{i=0}^n f_{t_i} \right\rangle_{\tau, s} ds, \end{aligned}$$

где Δ соответствует точке t_{i_m} , $\Delta' - t_{m'}$,

$$\frac{\delta}{\delta \xi_{\tau}} = \prod_{m=1}^n \frac{\delta^2}{\delta \xi(x) \delta \xi(y)}, \quad x \in \Delta, \quad y \in \Delta',$$

а остальные обозначения такие же, как в [7].

Вместо (13.7.4) нам понадобится оценка:

$$\left| \int_{\Delta} \frac{\delta^n}{\delta \xi(x_1) \dots \delta \xi(x_n)} \exp \left(-\lambda \int_{\Delta} :P(\xi(x)): dx \right) dx_1 \dots dx_n \right| \leq \\ \leq \left(C \lambda^{\frac{1}{l}} \right)^n \left(\frac{l-1}{l} n \right)!,$$

где l — степень P . При этом мы используем оценку: если $\int_{\Delta} :P(\xi(x)): dx = B$, то $\int_{\Delta} :P^{(\alpha)}(\xi(x)): dx \leq C B^{\frac{l-1}{l}}$, $B > 1$, с вероятностью 1 для $\alpha > 0$, где C зависит только от P . Например, для члена в f_t , равного

$$\left| \lambda^n \left(\int_{\Delta} :P^{(1)}(\xi(x)): dx \right)^n \exp \left(-\lambda \int_{\Delta} :P(\xi(x)): dx \right) \right| \leq \\ \leq \sup_B \lambda^n B^{\frac{l-1}{l} n} e^{-\lambda B} \leq \left(\frac{l-1}{l} n \right)! \left(C \lambda^{\frac{1}{l}} \right)^n.$$

Далее доказательство полностью повторяет доказательство теоремы 1 в § 7, гл. 4 [7].

§ 2. Решетчатые поля с дальнедействующим неограниченным потенциалом

Этот параграф написан Р. Р. Ахмитзяновым и Е. Н. Петровой и является исправленной версией работы [12].

Пусть на Z^v рассматривается гиббсово поле с вещественными значениями x_t

$$\frac{d\mu_{\Lambda}}{d\mu_0} = Z_{\Lambda}^{-1} \exp(-U_{\Lambda}),$$

$$U_{\Lambda} = \sum_{t \in \Lambda} |x_t|^m + \sum_{t, t' \in \Lambda} U_{tt'},$$

$$U_{tt'} = \lambda x_t^{2k} x_{t'}^{2k} r_{tt'}^{-v-\varepsilon}, \quad r_{tt'} = |x_t - x_{t'}|,$$

где μ_0 — мера Лебега на $R^{|\Lambda|}$.

Теорема 1. Если $m\varepsilon - 4kv > 0$, то система мер μ_{Λ} допускает кластерное разложение.

Доказательство. Введем константу $B = \lambda^{-\frac{1}{8k}}$ и для каждой фиксированной конфигурации построим систему шаров: для каждой t такой, что $|x_t| > B$, строим шар с центром в t радиуса

$$R_t = \left(\frac{|x_t|}{B} \right)^{\frac{4k}{\varepsilon(1-\theta)}}, \quad (1)$$

где $0 < \omega < 1$ такое, что

$$m\varepsilon(1-\omega) - 4k\nu > 0.$$

Связные константы объединения этих шаров назовем каплями. Обозначим $T = \{(t, t') : t \text{ и } t' \text{ не принадлежат одновременно одной и той же капле}\}$. Элементы T будем называть звеньями.

Используем разложение

$$\begin{aligned} \exp\left(-\lambda \sum_{(t, t') \in T} U_{tt'}\right) &= \sum_{Q \subset T} \prod_{(t, t') \in Q} [\exp(-U_{tt'}) - 1] \stackrel{\text{def}}{=} \\ &= \sum_{Q \subset T} \prod_{(t, t') \in Q} a_{tt'}. \end{aligned}$$

Рассмотрим связные «графы» Γ , образованные каплями и звеньями. Лемма 1.

$$Z_\Lambda = \sum_{\Gamma_1, \dots, \Gamma_n} c^{|\Lambda - \bar{U}\Gamma|} k_{\Gamma_1} \dots k_{\Gamma_n},$$

где $\bar{\Gamma}$ — носители Γ ,

$$c = \int_{-B}^B \exp(-|x|^m) dx,$$

$$k_\Gamma = \int \prod_{D \subset \bar{\Gamma}} \exp\left(-\lambda \sum_{t, t' \in D} U_{tt'}\right) \prod_{(t, t') \in \Gamma} a_{tt'} \prod_{t \in \bar{\Gamma}} \exp(-|x_t|^m) dx_t,$$

где интеграл по множеству конфигураций на $\bar{\Gamma}$ таких, что связные компоненты порожденных ими шаров в точности совпадают с каплями в Γ . Произведение \prod берется по всем каплям D , входящим в Γ , $\prod_{(t, t') \in \Gamma}$ — по всем звеньям из Γ .

Эта лемма непосредственно следует из построения.

Лемма 2. Для любой конфигурации и для любого ее звена

$$|a_{tt'}| \leq \lambda x_t^{2k} x_{t'}^{2k} r_{tt'}^{-\nu-\varepsilon} = \sqrt{\lambda} r_{tt'}^{-\nu-\varepsilon\omega}.$$

Доказательство. Рассмотрим три случая: 1) $|x_t|, |x_{t'}| < B$; 2) $|x_t| > B, |x_{t'}| < B$; 3) $|x_t|, |x_{t'}| > B$.

Случай 1).

$$\lambda x_t^{2k} x_{t'}^{2k} r_{tt'}^{-\nu-\varepsilon} \leq \lambda B^{4k} r_{tt'}^{-\nu-\varepsilon} \leq \sqrt{\lambda} r_{tt'}^{-\nu-\varepsilon}.$$

Случай 2). Здесь $r_{tt'} > R_t$ и мы имеем

$$\begin{aligned} \lambda x_t^{2k} x_{t'}^{2k} r_{tt'}^{-\nu-\varepsilon} &\leq \lambda x_t^{2k} B^{2k} r_{tt'}^{-\nu-\varepsilon\omega} R_t^{-\varepsilon(1-\omega)} \leq \\ &\leq \frac{\lambda x_t^{2k} B^{2k} r_{tt'}^{-\nu-\varepsilon\omega} B^{4k}}{x_t^{4k}} \leq \lambda B^{4k} r_{tt'}^{-\nu-\varepsilon\omega} \leq \sqrt{\lambda} r_{tt'}^{-\nu-\varepsilon\omega}. \end{aligned}$$

Случай 3). В данном случае t, t' принадлежит разным каплям и значит

$$r_{tt'} > R_t + R_{t'} > (R_t R_{t'})^{1/2}.$$

Отсюда

$$r_{tt'}^{-\varepsilon(1-\omega)} \leq R_t^{\frac{-\varepsilon(1-\omega)}{2}} R_{t'}^{\frac{-\varepsilon(1-\omega)}{2}} = \frac{B^{4k}}{x_t^{2k} x_{t'}^{2k}}.$$

Поэтому

$$\lambda x_t^{2k} x_{t'}^{2k} r_{tt'}^{-\nu-\varepsilon} \leq \lambda r_{tt'}^{-\nu-\varepsilon\omega} x_t^{2k} x_{t'}^{2k} r_{tt'}^{-\varepsilon(1-\omega)} \leq \sqrt{\lambda} r_{tt'}^{-\nu-\varepsilon\omega}.$$

Лемма 3. Для шара с центром в t

$$\exp\left(-\frac{1}{2} |x_t|^m\right) \leq (\sqrt{\lambda})^N,$$

где N — число точек в этом шаре.

Доказательство. Так как $N \leq cR_t^\nu$, то достаточно доказать, что

$$\exp\left(-\frac{1}{2} |x_t|^m\right) \leq \lambda^{\frac{c_1 R_t^\nu}{2}},$$

или, используя (1),

$$|x_t|^m \geq C \left(\frac{|x_t|}{B}\right)^{\frac{4k\nu}{\varepsilon(1-\omega)}} (-\ln \lambda),$$

или подставляя значение B

$$|x_t|^{\frac{m\varepsilon(1-\omega)-4k\nu}{\varepsilon(1-\omega)}} \geq C (-\ln \lambda) \lambda^{\frac{\nu}{2\varepsilon(1-\omega)}}.$$

Последнее неравенство выполнено в условиях теоремы для достаточно малых λ .

Из леммы 3 следует оценка

$$\exp\left(-\frac{1}{2} \sum_t' |x_t|^m\right) \leq (\sqrt{\lambda})^{|\Sigma|}, \quad (2)$$

где Σ' — по всем центрам шаров данной капли D .

Из леммы 2 и оценки (2) стандартным суммированием по «графам» следует кластерная оценка (см. [7]).

§ 3. Моды Федербуша и разложение Бэттла

Пусть $\xi_x, x \in Z^\nu$, — гауссово поле с $\langle \xi_y \rangle = 0$, $\langle \xi_x \xi_y \rangle = \Phi(x-y)$. Пусть B — оператор в $l_2(Z^\nu)$ с ядром $\Phi(x-y)$ и пусть существуют $A = B^{-1}$ и \sqrt{A} .

Если $\psi_k(x)$ — ортонормированный базис в $l_2(Z^v)$, то

$$\alpha_k = \sum_x c_{kx} \xi_x, \quad c_{kx} = (\sqrt{A} \psi_k)(x) \quad (1)$$

является таковым в пространстве гауссовых величин. При этом

$$\xi_x = \sum_k c_{kx} \alpha_k. \quad (2)$$

В § 4 главы 1 под разложением на моды понималось разложение пространства гауссовых величин на ортогональные подпространства (по импульсам), а внутри каждого такого подпространства есть свой масштаб убывания корреляций. Федербуш предложил [68] полную ортогонализацию (1) для специфического базиса ψ_k , который мы сейчас кратко опишем.

Положим для $f(x) \in l_2(Z^v)$

$$(\nabla_i f)(x) = f(x^1, \dots, x^i, \dots, x^v) - f(x^1, \dots, x^i - 1, \dots, x^v),$$

$$\nabla^\alpha = \nabla_1^{\alpha^1} \dots \nabla_v^{\alpha^v}$$

для любого набора $\alpha = (\alpha^1, \dots, \alpha^v)$ неотрицательных целых чисел. Пусть \mathcal{L}_k — множество функций вида $\nabla^\alpha f$, где f имеет конечный носитель, а $|\alpha| = \alpha^1 + \dots + \alpha^v = k$.

Утверждение 1. Для всех k \mathcal{L}_k плотно в $l_2(Z^v)$.

Нетрудно доказывается переходом к преобразованию Фурье.

Утверждение 2. \mathcal{L}_k ортогонально многочленам вида

$$\sum_{|\alpha| < k} a_\alpha x^\alpha; \quad x^\alpha = x_1^{\alpha^1} \dots x_v^{\alpha^v}. \quad (3)$$

Для доказательства надо «проинтегрировать по частям» с помощью формулы Лейбница

$$\nabla_i (fg) = (\nabla_i f) g + f (\nabla_i g) - (\nabla_i f) (\nabla_i g).$$

Обозначим теперь $\Delta_{r,0} = \{0, 1, \dots, p^r - 1\}^v \subset Z^v$.

Утверждение 3.

$$\dim(\mathcal{L}_{s+1} \cap l_2(\Delta_{1,0})) = p^v - M,$$

где $M = M(s)$ — число линейно независимых многочленов (3) степени $\leq s$, если только p таково, что число линейно независимых многочленов (3) в кубе $\Delta_{1,0}$ также равно M .

Для $v=1$ это следует из линейной независимости функций $\nabla^{s+1} \chi_t$, $t=0, 1, \dots, p-s-2$, где $\chi_t(x) = 1$, если $t=x$, и равно 0 в остальных случаях. Для $v > 1$ аналогично.

Рассмотрим разбиение $\{\Delta_{r,\gamma}\}$ для любого $r=1, 2, \dots$, решетки Z^v на кубы, конгруэнтные $\Delta_{r,0}$; γ нумерует кубы данного разбиения. В [68] строится рекуррентно базис ψ_k , $k=(r_k, \gamma_k, t_k) = (r, \gamma, t)$, где для данных r и γ индекс t пробегает $p^v - M$ значений для $r=1$ и $Mp^v - M$ значений для $r > 1$. Точнее сначала произвольно выбирается базис в $l_2(\Delta_{1,0}) \cap \mathcal{L}_{s+1}$, в осталь

ных $\Delta_{1,\nu}$ — сдвигом. При $r \geq 2$ в пространстве функций в $\Delta_{r,0}$ являющихся многочленами степени $\leq s$ в каждом $\Delta_{r-1,\nu} \subset \Delta_{r,0}$ и ортогональных всем многочленам степени $\leq s$ в $\Delta_{r,0}$ (это пространство очевидно имеет размерность $Mp^\nu - M$), произвольно выбирается базис.

Для $r \geq r_0$ можно конкретизировать это построение. Рассмотрим семейство $\{\psi\}$ функций в $L_2([0, p^\nu], d^\nu x)$, удовлетворяющих условиям:

а) на каждом из единичных кубов с целочисленными вершинами в $[0, p^\nu]$ ψ являются полиномами степени $\leq s$;

$$\text{в) } \int_{[0, p^\nu]} \psi x^\alpha d^\nu k = 0, \quad |\alpha| \leq s.$$

Выберем в этом множестве произвольный базис $\Phi_t(x)$, $t = 1, \dots, Mp^\nu - M$. Затем $\psi_k(x)$ можно выбрать близкими к функциям

$$\frac{1}{(p^{r-1})^{\nu/2}} \Phi_{t_k} \left(\frac{x}{p^{r-1}} \right), \quad (4)$$

что объясняет связь мод Федербуша с ренормгруппой.

Далее можно строить различного рода кластерные разложения на множестве \hat{T} индексов k (см. замечание 1, стр. 101 [7]). Факторы сходимости многомасштабных кластерных разложений, как в главе 2 ($M^{-1}, \lambda, e^{-d\tau}$), переходят в алгоритмах Федербуша в оценки коэффициентов c_{kx} и в комбинаторику кластерных разложений. Мы отсылаем за подробностями к работам Федербуша и Бэттла (см. § 4 этой главы). Пока этими методами удалось получить не очень много результатов, но ими раскрыты богатые структуры в теории кластерных разложений.

В общей идеологии кластерных разложений представляет интерес работа Бэттла [41]. Он обсуждает различия между «внешними» (exterior) разложениями типа

$$\langle F_A \rangle_\Lambda = \sum k_\Gamma^{(\Lambda)}(A) \frac{Z_{\Lambda \setminus (A \cup \Gamma)}}{Z_\Lambda}, \quad (5)$$

где каждый член разложения, нумеруемый множествами $\Gamma \subset \Lambda$, зависит от некоторой внешности $A \cup \Gamma$, и «внутренними» (interior) разложениями типа формулы (8) [7] см. на стр. 109. Бэттл вводит новый класс разложений, названный им естественными (intrinsic): в рекуррентной формуле типа (5) могут фигурировать другие корреляционные функции вместо $f_A^{(\Lambda)} = \frac{Z_{\Lambda \setminus A}}{Z_\Lambda}$. Он вводит этот класс на примере следующей модели:

$$\begin{aligned} \frac{d\mu_\Lambda}{d\nu} &= Z_\Lambda^{-1} \exp \left(-\lambda \left(\sum J(x-y) \sigma_x \sigma_y + \sum g(\sigma_x) \right) \right) = \\ &\equiv Z_\Lambda^{-1} \exp(-\lambda U_\Lambda), \end{aligned}$$

где $\sigma_x \in R$, $x \in \Lambda \subset Z^v$, $J(x-y)$ — положительно определено, и $\sum_x |J(0, x)| < \infty$,

$$c |\sigma|^v \leq \dot{g}(\sigma) \leq c |\sigma|^\alpha$$

для некоторых $\gamma > 1$ и $\alpha \geq 2$. Мера ν является произведением мер $d\mu(\sigma)$ на R таких, что

$$\int d\mu(\sigma) (1 + |\sigma|^\alpha) < \infty.$$

Кластерное разложение для системы мер μ_Λ строится следующим рекуррентным образом. На первом шаге применяется одна из разновидностей интерполяционной формулы (F_A — функция с носителем в $A \subset \Lambda$)

$$\begin{aligned} \langle F_A \rangle_\Lambda &= \langle F_A \rangle_A - 2\lambda \sum_{x \in A} \sum_{y \in \Lambda \setminus A} J(x-y) \times \\ &\times \int_0^1 ds_1 (\langle F_A \sigma_x \sigma_y \rangle_{s_1} - \langle F_A \rangle_{s_1} \langle \sigma_x \sigma_y \rangle_{s_1}), \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\langle F \rangle_s = \frac{\langle F \exp(-\lambda U_\Lambda(s_1)) \rangle_0}{\langle \exp(-\lambda U_\Lambda(s_1)) \rangle_0},$$

$$U_\Lambda(s_1) = s_1 U_\Lambda + (1-s_1)[U_A + U_{\Lambda \setminus A}].$$

Далее для каждой из корреляционных функций $\langle F_A \sigma_x \sigma_y \rangle_{s_1}$, $\langle F_A \rangle_{s_1}$, $\langle \sigma_x \sigma_y \rangle_{s_1}$ в правой части (6) эта процедура повторяется. Получающийся бесконечный ряд вполне аналогичен обычному «внутреннему» кластерному разложению.

Разложение (6) имеет ряд преимуществ. Так в существенной области параметров оно сильнее, чем разложение § 2 этой главы или работы [67] (см. также [47]).

§ 4. Другие работы

Началом метода многомасштабных кластерных разложений можно считать знаменитую работу Глимма—Джаффе [2], основывающуюся частично на более ранних идеях Глимма [105, 106]. В [2] доказана устойчивость (конечность) статистической суммы модели ϕ_3^4 . Хотя в этой работе ренормгруппа не упоминалась, но уже использовалось разбиение на моды и их последовательное интегрирование. Усовершенствование метода Глимма—Джаффе и построение ϕ_3^4 в конечном и бесконечном объеме было осуществлено в работах [72, 73, 78, 119, 120, 125]. Вводное изложение этого метода см. в [6].

Следующим шагом был ряд новых идей Галлавогги. По-видимому, это было стимулировано иерархическими моделями Дайсона и различными связанными с ними исследованиями. Обзор по иерархическим моделям см. в [1] и [9]. В [80] вводится иерархическая бернуллиевская модель и дается доказательство устойчивости ее статсуммы для ϕ_3^4 модели. В этой работе уже

сказано (одной фразой о связи разбиения на клетки с ренормгруппой Вильсона. Вводится также марковская иерархическая модель (исследование которой продолжено в [81, 50]), где η_d для кубов фиксированного ранга k является гауссовым марковским полем на решетке. Многие идеи и технические приемы из [80] использовались во всех последующих работах по многомасштабным разложениям.

Настоящая φ_3^4 исследована Галлаветти и др. в [49]. Однако ряд технических приемов (в частности, из-за фиксации на марковском свойстве) слишком сложны, требуют тонкого анализа краевых задач для эллиптических уравнений, который и осуществлен в [51]. Это, по-видимому, и остановило дальнейшее продвижение по такому пути. В [52], [124] рассмотрена двумерная модель с взаимодействием $2\lambda \int \cos \alpha \xi(x) : dx$. Хорошо известно, что при $\alpha^2 < 4\lambda$ она не требует перенормировок. При $4\lambda \leq \alpha^2 < 8\lambda$ необходимы только вакуумные контрчлены. Этот случай фактически и исследован. При переходе

через пороги $\alpha_{2n}^2 = 8\lambda(1 - \frac{1}{2n})$ меняется структура вакуумных контрчленов.

Известно, что преобразование сайн-Гордон сводит данную модель к кулоновскому газу. Обсуждается, как изменение структуры контрчленов сказывается на статфизической картине кулоновского газа. Алгебраизация этой техники («итерированное разложение Майера») дана в [48]. Другие «итерированные разложения Майера» см. в статье Имбри в сборнике [23] и в работах Гелфанда и Макка.

В цикле работ Гавендзкого—Купьянена получено кластерное разложение для возмущения безмассового гауссова поля на Z^3 взаимодействием $V(\Delta \xi)$ для широкого класса функций V . Окончательные результаты см. в [94, 95]. Более простые модели или результаты см. [87—90].

Модель $\lambda \varphi^4 + m^2 \text{crit}(\lambda) \varphi^2$ на Z^4 построена (с полным контролем над ней) в [93]. Это было первым примером контроля над несверхперенормируемой моделью. В подходе Гавендзкого—Купьянена отчетливо видно разделение ролей ренормгруппы и кластерных разложений в контроле над сходимостью многомасштабных разложений. В [99] ими построена ультрафиолетовая модель $\lambda \varphi^4$ с $\lambda < 0$. Иерархические аналоги см. в [91, 86, 103].

Двумерная модель Гросса—Неве построена в [100]. Ее построение — первый пример контроля над ультрафиолетовой несверхперенормируемой моделью, удовлетворяющей аксиомам Остервальдера—Шредера. В [101] содержится строгий контроль над ε -разложением в перенормируемой модели Гросса—

Неве с пропагатором $\frac{\mu}{\mu^2(1-\varepsilon)}$. Построена негауссова неподвижная точка

ренормгруппы Вильсона. В бозонном иерархическом случае ε -разложение исследовалось в [92, 97]. Более ранние работы по иерархическим моделям см.

в [1]. Попытка добавить к многомасштабным разложениям $\frac{1}{N}$ -разложение содержится в [98]. Исключительно насыщенный (но трудно читаемый) обзор всех последних работ этих авторов см. [102].

Одновременно с работами Гавендзкого—Купьянена начался цикл работ Балабана, в котором также усовершенствовалась техника Галлаветти, но с упором на специфические трудности калибровочных моделей. Техника Балабана объяснена на примере модели φ_3^4 в [23]. Она основана на оценке статсумм. Поэтому для ее использования в несверхперенормируемых моделях требуются ее изменения.

Заметим сначала, что более ранняя деятельность по двумерным калибровочным моделям (см. [111—113, 58—60]) отражена в монографии [5]. В [15—17] и [18—20] рассматривается решетчатая аппроксимация трехмерной ($d=3$) модели с взаимодействием

$$\sum_{\mu=1}^d \frac{1}{2} |\partial_\mu \Phi(x) + e q A_\mu(x) \Phi(x)|^2 + \frac{1}{2} m_0^2 |\Phi(x)|^2 +$$

$$+\lambda |\Phi(x)|^4 + \sum_{\mu, \nu=1}^d \frac{1}{4} |F_{\mu\nu}(x)|^2 + \frac{1}{2} \mu_0^2 \sum_{\mu=1}^d |A_\mu(x)|^2, \quad (1)$$

где ϕ — скалярное поле со значениями в R^N , g — антисимметрическая $N \times N$ -матрица, A_μ — векторное поле, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Доказывается устойчивость статсумм равномерно по шагу ε решетки (в фейнмановской калибровке). Вакуумные контрчлены в этой статсумме вводятся явно разложением по теории возмущений до 6-го порядка включительно. Несколько другая модель рассматривается в [21]. Необходимые свойства решетчатых пропагаторов доказываются в [22]. В [24—25] изучаются гауссовы калибровочные модели на решетке, действие блокспиновой ренормгруппы на них и свойства пропагаторов в разных масштабах.

Модель Хиггса без явного массового члена изучается в [33], [34], [32].

В [29] и в [26] намечено доказательство устойчивости статистических сумм в неабелевых калибровочных моделях. Действие блокспиновой ренормгруппы и ее модификаций в неабелевом случае изучается в порядке перечисления в работах [27, 30, 28]. Простейшее применение этой техники имеется в [31].

В [114] рассматривается модель с взаимодействием (1) и доказывается сходимостью эффективного взаимодействия для малых полей. Отсюда далее выводится сходимостью статсумм при стремящемся к нулю шаге решетки. В [115] эта модель строится в бесконечном объеме (с помощью корреляционных неравенств или кластерных разложений). Обсуждаются трудности с доказательством инвариантности относительно евклидовых вращений.

Обзорные лекции [110] содержат много информации и усовершенствований относительно трехмерной модели Хиггса (1) как в массивном, так и в безмассовом случае.

В работах [75, 121, 130] результаты Гавендзкого—Купьянена о $(\Delta\varphi)_3^4$ и φ_4^4 инфракрасных моделях были получены другим методом, являющимся развитием методов Глимма—Джаффе.

Многомасштабные разложения являются сейчас также простейшим методом доказательства БПХЦ-теоремы, получения оценок диаграмм. В частности, были передоказаны результаты работ [61—65]. Об этих вопросах, а также о связи классической теории перенормировок и многомасштабных разложений см. [74, 76, 77, 82—84].

В работах Федербуша и Бэттла разрабатываются различные приемы, новые комбинаторные оценки и найдены неожиданные идеи в теории кластерных разложений. В [68, 69] предлагается при изучении гиббсовских перестроек гауссова поля с медленным убыванием корреляций вводить специальный базис в пространстве гауссовых величин. Этот базис идейно связан с ренормгрупповой идеологией (разбиением на моды). В этих работах много технических новшеств, однако результат гораздо проще может быть получен другими методами (см., например, § 7.4 в [7]). В [44, 45, 36, 37] этот метод применен к ультрафиолетовым проблемам: φ_2^4 , φ_3^4 . Новые комбинаторные оценки имеются в [38, 43, 46, 47] и в [44].

В [41] пропагандируется новый метод кластерных разложений, не использующий статсумм. Применение этой техники к ферми-системам см. в [39, 40, 42].

Основным аргументом за несуществование φ_4^4 является ее инфракрасная асимптотическая свобода, доказанная Гавендзким и Купьяненом. Другие аргументы за см. в [10, 11, 13]. Обсуждение аргументов против см. в [85].

Построение ультрафиолетовых моделей с помощью корреляционных неравенств см. в [53, 57].

Полностью вне нашего обзора остались применения многомасштабных разложений к случайным операторам Шрёдингера, гиббсовским полям со случайным взаимодействием, блужданиям без самопересечений, системам с непрерывной симметрией и др. Часть из вопросов см. в сборнике [23].

ЛИТЕРАТУРА

1. Блехер П. М., Сургайлис Д., Автомодельные случайные поля. «Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Теория вероятностей. Мат. стат. Теор. кибернет.», 1983, 20, 3—51 (РЖМат, 1983, 10B91)
2. Глимм Дж., Джаффе А., Положительность гамильтониана поля ϕ^4 . «Евклидова квант. теория поля. Марковск. подход». М.: Мир, 1978, 132—197 (РЖМат, 1979, 1B264)
3. —, —, Математические методы квантовой физики. М.: Мир, 1984, 445 с.
4. Завьялов О. И., Перенормированные диаграммы Фейнмана. М.: Наука, 1979, 317 с. (РЖМат, 1980, 4B141)
5. Зайлер Э., Калибровочные теории. М.: Мир., 1985, 222 с.
6. Малышев В. А. Введение в евклидову квантовую теорию поля. М.: МГУ, 1985, 96 с. (РЖМат, 1986, 1B427K)
7. —, Миллос Р. А. Гиббсовские случайные поля. Метод кластерных разложений. М.: Наука, 1985, 288 с. (РЖМат, 1986, 1B420K)
8. Саймон Б., Модель $P(\phi)_2$ евклидовой квантовой теории поля. М.: Мир, 1976
9. Сингай Я. Г., Теория фазовых переходов, М.; Наука, 1980, 207 с.
10. Aizenman M., The intersection of Brownian paths as a case study of a renormalization group method for quantum field theory. Commun. Math. Phys., 1985, 97, № 1—2, 91—110 (РЖМат, 1985, 9B258)
11. —, Geometric analysis of Φ^4 fields and Ising models. Parts I and II. Commun. Math. Phys., 1982, 86, № 1, 1—48
12. Akhmitzjanov R. R., Malyshev V. A., Petrova E. N., Cluster expansion for unbounded nonfinite potential. «Statistical Physics and dynamical systems. Rigorous results», Eds. Fritz J., Jaffe A., Szasz D., Birkhauser, 1985, 221—235
13. Aragao de Carvalho C., Caracciolo S., Frohlich J., Polymers and g/ϕ^4 theory in four dimensions. Preprint, IHES, 1982, 70 p.
14. Auberson G., Mennessier G., The reciprocal of a Borel summable function is Borel summable. Commun. Math. Phys., 1985, 100, № 3, 439—446
15. Batalan T., Ultraviolet stability for a model of interacting scalar and vector fields. I. A lower bound. Preprint HUTMP, 1982, 89 p.
16. —, Ultraviolet stability for a model of interacting scalar and vector fields. II. An upper bound. Preprint. HUTMP, 1982, 116 p.
17. —, Ultraviolet stability for a model of interacting scalar and vector fields. III. Preprint, HUTMP, 1982
18. —, (Higgs) $_{2,3}$ quantum fields in a finite volume. I. A lower bound. Commun. Math. Phys., 1982, 85, 603—626
19. —, (Higgs) $_{2,3}$ quantum fields in a finite volume. II. An upper bound. Commun. Math. Phys., 1982, 86, № 4, 555—594 (РЖМат, 1983, 6B296)
20. —, (Higgs) $_{2,3}$ quantum fields in a finite volume. III. Renormalization. Commun. Math. Phys., 1983, 88, 411—445 (РЖМат, 1983, 10B210)
21. —, (Proca) $_{2,3}$ quantum field in a finite volume. III. Renormalization. Preprint. HUTMP, 1982, 70 p.
22. —, Regularity and Decay of lattice Green's Functions. Commun. Math. Phys., 1983, 89, № 4, 571—597 (РЖМат, 1984, 1B429)
23. —, Ultraviolet stability in field theory. The ϕ_3^4 model. «Scaling and self-similarity in physics». Ed. Fröhlich J., Birkhauser, 1983, 297—319
24. —, Propagators and renormalization transformations for lattice gauge theories. I. Commun. Math. Phys., 1984, 95, № 1, 17—40
25. —, Propagators and renormalization transformations for lattice gauge theories. II. Commun. Math. Phys., 1984, 96, № 2, 223—250
26. —, Recent results in constructing gauge fields. Physica, 1984, 124A, 79—90
27. —, Propagators for lattice gauge theories in a background field. Commun. Math. Phys., 1985, 99, № 3, 389—434

28. —, Spaces of regular gauge field configurations on a lattice and gauge fixing conditions. *Commun. Math. Phys.*, 1985, 99, № 1, 75—102
29. —, Renormalization group methods in non-Abelian gauge theories. Preprint, HUTMP, 1983, 35 p.
30. —, Averaging operators for lattice gauge theories. *Commun. Math. Phys.*, 1985, 98, № 1, 17—51
31. —, Ultraviolet stability of three-dimensional lattice pure gauge field theories. Preprint, Harvard Univ., 1985, 41 p.
32. —, *Imbrie J., Jaffe A.* Renormalization of the Higgs model: minimizers, propagators and the stability of mean field theory. *Commun. Math. Phys.*, 1985, 97, № 1—2, 299—329 (PJKMar, 1985, 9A644)
33. —, —, Exact renormalization group for gauge theories. Preprint, Harv. Univ., 1983, 25 p.
34. —, —, Brydges D. The mass gap for Higgs models on a unit lattice. *Ann. Phys.*, 1984, 158, № 2, 281—319
35. *Battle G. A.*, III, Pseudoscalar interaction of coupled quantum-mechanical oscillators with independent Fermi systems. *J. Math. Phys.*, 1982, 23, № 5, 760—779 (PJKMar, 1983, 2B280)
36. —, Non-Gaussian α -positivity of ϕ_a^{2n} field theories. *J. Funct. Anal.*, 1983, 51, № 3, 312—325 (PJKMar, 1983, 11B340)
37. —, Non-Gaussian α -positivity of ϕ_a^{2n} field theories. II. Preprint. Texas Univ., 1985, 29 p.
38. —, A new combinatoric estimate for cluster expansions. *Commun. Math. Phys.*, 1984, 94, № 1, 133—139 (PJKMar, 1985, 4B822)
39. —, An elementary expansion of the Yukawa₂ field theory without vacuum energy counter-terms. Part I. Preprint, Texas Univ., 1985, 31 p.
40. —, An elementary expansion of the Yukawa₂ field theory without vacuum energy counter-terms. Part II. Preprint, Texas Univ., 1985, 40 p.
41. —, An intrinsic cluster expansion for statistical mechanics. Preprint. Texas Univ., 1985
42. —, A technical note on a fermi cluster expansion. Preprint. Texas Univ., 1985, 11 p.
43. —, Application of the Tataru—Vinicius identity to an enumeration problem. Preprint. Texas Univ., 1985, 4 p.
44. —, *Federbush P.*, A phase cell cluster expansion for Euclidean field theories. *Ann. Phys.*, (USA), 1982, 142, № 1, 95—139 (PJKMar, 1983, 4B383)
45. —, —, A phase cell cluster expansions for a hierarchical ϕ_3^4 model. *Commun. Math. Phys.*, 1983, 88, № 2, 263—293 (PJKMar, 1983, 9B249)
46. —, —, A note on cluster expansions, tree graph identities, extra $1/N!$ factors!!! *Lett. Math. Phys.*, 1984, 8, № 1, 55—57 (PJKMar, 1984, 7B207)
47. —, —, *Robinson R. W.*, Tree graphs and quasi-bounded spin systems. Preprint, 1984
48. *Benfatto G.*, An iterated Mayer expansion for the Yukawa gas. Preprint, Univ. di Roma, dip. di Matematica, 1984, 18 p.
49. —, *Cassandro M., Gallovetti G., Nicolo F., Olivieri E., Presutti E., Scaccia-telli E.*, Ultraviolet stability in euclidean scalar field theories. *Commun. Math. Phys.*, 1980, 71, № 2, 95—130 (PJKMar, 1980, 8B136)
50. —, —, —, —, —, —, Some probabilistic techniques in field theory. *Commun. Math. Phys.*, 1978, 59, № 2, 143—166 (PJKMar, 1978, 12B391)
51. —, *Gallavotti G., Nicolo F.*, Elliptic equations and gaussian processes. *J. Funct. Anal.*, 1980, 36, № 3, 343—400 (PJKMar, 1980, 10B203)
52. —, —, —, On the massive sine-Gordon equation in the first few regions of collapse. *Commun. Math. Phys.*, 1982, 83, № 3, 387—410 (PJKMar, 1982, 9B195)
53. *Bovier A., Felder G.*, Skeleton inequalities and the asymptotic nature of perturbation theory for ϕ^4 -theories in two and tree dimensions. *Commun. Math. Phys.*, 1984, 93, № 2, 259—275 (PJKMar, 1984, 11B251)
54. *Breen S.*, Leading large order asymptotics for $(\phi^4)_2$ perturbation theory. *Commun. Math. Phys.*, 1983, 92, № 2, 179—194 (PJKMar, 1984, 6B241)

55. *Brydges D.*, Field theories and Symanzik's polymer representation. «Gauge Theor. Fundam. Interact. and Rigor. Results. Lect. Int. Summer Sch. Theor. Phys., Poiana Brasov, 1981». Boston e. a. 1982, 311—337 (PJKMar, 1985, 5B667)
56. —, *Federbush P.*, A new form of the Mayer expansion in classical statistical mechanics. *J. Math. Phys.*, 1978, 19, № 10, 2064—2067 (PJKMar, 1979, 5B314)
57. —, *Fröhlich J., Sokal A. D.*, A new proof of the existence and nontriviality of the continuum ϕ_2^4 and ϕ_3^4 quantum field theories. *Commun. Math. Phys.*, 1983, 91, № 2, 141—186 (PJKMar, 1984, 4B257)
58. —, —, *Seiler E.*, On the construction of quantized gauge fields. I. General results. *Ann. Phys.*, 1979, 121, № 1—2, 227—284 (PJKMar, 1980, 3B251)
59. —, —, —, On the construction of quantized gauge fields. II. Construction of the lattice approximation. *Commun. Math. Phys.*, 1980, 71, 159—205
60. —, —, —, On the construction of quantized gauge fields. III. The two-dimensional abelian Higgs model without cutoffs. *Commun. Math. Phys.*, 1981, 79, № 3, 353—399 (PJKMar, 1981, 10B311)
61. *Calan C. de, Petritis D., Rivasseau V.*, Local existence of the Borel transform in Euclidean massless ϕ_4^4 . *Commun. Math. Phys.*, 1985, 101, № 4, 559—577
62. —, *Rivasseau V.*, Renormalization in the complete Mellin representation of Feynman amplitudes. *Commun. Math. Phys.*, 1981, 78, 531—544
63. —, —, Local existence of the Borel transform in Euclidean ϕ_4^4 . *Commun. Math. Phys.*, 1981, 82, № 1, 69—100 (PJKMar, 1982, 5B394)
64. —, —, A comment on the local existence of the Borel transform in euclidean ϕ_4^4 . *Commun. Math. Phys.*, 1983, 91, № 2, 265 (PJKMar, 1984, 4B258)
65. —, —, The perturbation series ϕ_3^4 field theory is divergent. *Commun. Math. Phys.*, 1982, 83, № 1, 77—82 (PJKMar, 1982, 8B277)
66. *Cammarota C.*, Decay of correlations for infinite range interactions in unbounded spin systems. *Commun. Math. Phys.*, 1982, 85, № 4, 517—528
67. *Combe Ph., Høegh-Krohn R., Rodriguez R., Sirugue M., Sirugue-Collin M.* Zero mass, 2 dimensional real time sine-Gordon model without u. v. cut-offs. *Ann. Inst. H. Poincaré*, 1982, A37, № 2, 115—127 (PJKMar, 1983, 5B327)
68. *Federbush P.*, A mass zero cluster expansion. Part 1. The expansion. *Commun. Math. Phys.*, 1981, 81, № 3, 327—340 (PJKMar, 1982, 4B483)
69. —, A mass zero cluster expansion. Part 2. Convergence. *Commun. Math. Phys.*, 1981, 81, № 3, 341—360 (PJKMar, 1982, 4B484)
70. —, A phase cell approach to Yang—Mills theory. O. Introductory exposition. Preprint. Univ. of Michigan. 1984, 24 p.
71. —, *Kennedy T.*, Surface effects in Debye screening. Preprint, 1985, 127 p.
72. *Feldman J.*, The $\lambda\phi_3^4$ field theory in a finite volume. *Commun. Math. Phys.*, 1974, 37, № 2, 93—120 (PJKMar, 1975, 8B541)
73. —, Ph. D. Thesis. Harvard Univ., 1974
74. —, *Magnen J., Rivasseau V., Sénéor R.*, Bounds on completely convergent euclidean Feynman graphs. *Commun. Math. Phys.*, 1985, 98, № 2, 273—288 (PJKMar, 1985, 10B323)
75. —, —, —, Infra red ϕ_4^4 . Lectures at XLIII Session of Les Houches Summer School in Critical Phenomena, Random Systems, Gauge Theories. 1984, 44 p.
76. —, —, —, Large order bounds for the perturbative ϕ_4^4 theory. Lectures XLIII Session of Les Houches Summer School on: Critical Phenomena, Random Systems. Gauge Theories, Preprint, 1984, 16 p.
77. —, —, —, Bounds on renormalized Feynman graphs. *Commun. Math. Phys.*, 1985, 100, № 1, 23—55
78. —, *Osterwalder K.*, The Wightman axioms and the mass gap for weakly coupled $(\phi^4)_3$ quantum field theories. *Ann. Phys.*, (USA), 1976, 97, 80—135
79. *Fröhlich J., Imbrie J. Z.*, Improved perturbation expansion for disordered systems: beating Griffith singularities. Preprint HUTMP, 1985

80. *Gallavotti G.*, Some aspects of the renormalization problems in statistical mechanics and field theory. *Atti Accad. naz. Lincei Mem. Cl. sci. fis., mat. e natur.*, 1978, Sez. 1, 15, № 2, 23—59 (PЖMat, 1979, 7B236)
81. —, On the ultraviolet stability in statistical mechanics and field theory. *Ann. math. pura ed appl.*, 1979, 120, 1—23 (PЖMat, 1980, 3B254)
82. —, Renormalization theory and ultraviolet stability for scalar fields via renormalization group methods. Preprint Univ. di Roma, Dip. di Matematica, 1984
83. —, *Nicolo F.* Renormalization theory in four-dimensional scalar fields (I). *Commun. Math. Phys.*, 1985, 100, № 4, 545—590
84. —, —, Renormalization theory in four-dimensional scalar fields (II). *Commun. Math. Phys.*, 1985, 101, № 2, 247—282
85. —, *Rivasseau V.*, Φ^4 field theory in dimension 4: a modern introduction to its unsolved problems. *Ann. Inst. H. Poincaré*, 1984, 40, № 2, 185—210
86. *Gawędzki K.*, Block spin renormalization. Preprint Institut des Hautes, Etudes Scientifiques, France, May, 1984
87. —, *Kupiainen A.*, Renormalization group study of a critical lattice model. I. Convergence to the line of fixed points. *Commun. Math. Phys.*, 1981, 82, № 3, 407—433 (PЖMat, 1982, 7B250)
88. —, —, Renormalization group study of a critical lattice model. II. The correlation functions. *Commun. Math. Phys.*, 1982, 83, № 4, 469—492 (PЖMat, 1982, 7B251)
89. —, —, Renormalization group for a critical lattice model. Effective interactions beyond the perturbation expansion or bounded spins approximation. *Commun. Math. Phys.*, 1983, 88, № 1, 77—94 (PЖMat, 1983, 9B250)
90. —, —, A rigorous block spin approach to massless lattice theories. *Commun. Math. Phys.*, 1980, 77, № 1, 31—64 (PЖMat, 1981, 3B212)
91. —, —, Triviality of ϕ_4^4 and all that in hierarchical model approximation. *J. Stat. Phys.*, 1982, 29, № 4, 683—698
92. —, —, Non-Gaussian fixed points of the block spin transformation hierarchical model approximation. *Commun. Math. Phys.*, 1983, 89, № 2, 191—220 (PЖMat, 1984, 1B1123)
93. —, —, Massless lattice ϕ_4^4 theory: rigorous control of a renormalizable asymptotically free model. *Commun. Math. Phys.*, 1985, 99, № 2, 197—252
94. —, —, Block spin renormalization group for dipole gas and $(\Delta\phi)^4$. *Ann. Phys.*, 1983, 147, № 1, 198—243
95. —, —, Lattice dipole gas and $(\Delta\phi^4)$ models at long distances: decay of correlations and scaling limit. *Commun. Math. Phys.*, 1984, 92, № 4, 531—553 (PЖMat, 1984, 9B446)
96. —, —, Rigorous renormalization group and asymptotic freedom. In «Scaling and self-similarity in physics». Ed. Fröhlich J. Birkhäuser, 1983, 227—262
97. —, —, Non-gaussian scaling limits. Hierarchical model approximations. *IHES*, July, 1983, 26 p.
98. —, —, Rigorous renormalization group and large N . Univ. Bielefeld, Preprint, 1983, 12 p.
99. —, —, Non-trivial continuum limit of a ϕ_4^4 model with negative coupling constant. Harvard Univ., Preprint, 1984, 51 p.
100. —, —, Gross-Neveu model through convergent perturbation expansions. Univ. Helsinki, Preprint, 1985, 54 p.
101. —, —, Renormalization of a non-renormalizable quantum field theory. Univ. Helsinki, Preprint, 1985
102. —, —, Asymptotic freedom beyond perturbation theory. Harvard Univ., Preprint, 1985, 156 p.
103. —, —, *Tirozzi B.*, Borel summability of the perturbation series in a hierarchical $\lambda(\Delta\phi)^4$ model. *J. Stat. Phys.*, 1984, 36, № 1—2, 145—162 (PЖMat, 1985, 3B234)
104. —, —, —, Renormalons: a dynamical system approach. Preprint. HUTMP, 1984, 35 p.

105. *Glimm J.*, Yukawa coupling of quantum fields in two dimensions. I. Commun. Math. Phys., 1967, 5, № 5, 343—386 (PЖMar, 1968, 12B476)
106. —, Boson fields with the: φ^4 : interaction in three dimensions. Commun. Math. Phys., 1968, 10, № 1, 1—47
107. *Gross L.*, Convergence of $U(1)_3$ lattice gauge theory to its continuum limit. Commun. Math. Phys., 1983, 92, № 2, 137—162 (PЖMar, 1984, 7B208)
108. *Hooft G't.*, On the convergence of planar diagram expansion. Commun. Math. Phys., 1982, 86, № 4, 449—464
109. —, Rigorous construction of planar diagram field theories in four dimensional euclidean space. Commun. Math. Phys., 1983, 88, № 1, 1—26
110. *Imbrie J.*, Renormalization group methods in gauge field theories. Harv. Univ., Preprint, 1985, 81 p.
111. *Ito K. R.*, Construction of two-dimensional quantum electrodynamics based on a hamiltonian formalism. Lett. Math. Phys., 1978, 2, № 5, 357—365 (PЖMar, 1979, 2B256)
112. —, Construction of two-dimensional quantum electrodynamics. J. Math. Phys., 1980, 26, № 6, 1473—1494 (PЖMar, 1981, 2B435)
113. —, Construction of euclidean (QED)₂ via lattice gauge theory. Boundary condition and volume dependence. Commun. Math. Phys., 1982, 83, № 4, 537—561 (PЖMar, 1982, 8B286)
114. *King C.*, The $U(1)$ Higgs model I. The continuum limit. HUTMP, Preprint, 1984, 86 p.
115. —, The $U(1)$ Higgs model II. The infinite volume limit. HUTMP, Preprint, 1984, 66 p.
116. *Lang G., Lesniewski A.*, Axioms for renormalization in euclidean quantum field theory. Commun. Math. Phys., 1983, 91, № 4, 505—518 (PЖMar, 1984, 4B249)
117. *Lesniewski A.*, On Callan's proof of the BPHZ theorem. Helv. Phys. Acta, 1983, 56, № 6, 1158—1167 (PЖMar, 1984, 8B281)
118. *Mack G., Pordt A.*, Convergent perturbation expansions for euclidean quantum field theory. Commun. Math. Phys., 1985, 97, № 1—2, 267—298
119. *Magnen J., Sénéor R.*, The infinite volume limit of the φ_s^4 model. Ann. Inst. H. Poincaré, 1976, 24, 95—159
120. —, —, Phase space cell expansion and Borel summability for the Euclidean φ_s^4 theory. Commun. Math. Phys., 1977, 56, 237—276 (PЖMar, 1978, 5B262)
121. —, —, The infra-red behaviour of $(\Delta\varphi)_s^4$. Ann. Phys., 1982, 152, № 1, 130—202
122. —, —, A note on cluster expansions. Ann. Inst. H. Poincaré, 1983, A38, № 1, 93—98 (PЖMar, 1983, 8B310)
123. *Malyshev V. A.*, Uniform cluster estimates for lattice models. Commun. Math. Phys., 1980, 64, № 2, 131—157 (PЖMar, 1979, 5B311)
124. *Nicolo F.*, On the massive sine-Gordon equation in the higher regions of collapse. Commun. Math. Phys., 1983, 88, № 4, 561—600 (PЖMar, 1984, 1B329)
125. *Park Y. M.*, Convergence of lattice approximations and infinite volume limit in the $(\lambda\varphi^4 - \sigma\varphi^2 - \mu\varphi)_3$ field theory. J. Math. Phys., 1977, 18, № 3, 354—366 (PЖMar, 1977, 8B239)
126. *Polchinski J.*, Renormalization and effective lagrangeans. Nucl. Phys. B, 1984, 231, № 2, 269—295
127. *Potthof J.*, Euclidean φ_s^4 theory in a electromagnetic potential. Ann. Inst. H. Poincaré, 1982, A37, № 2, 129—154 (PЖMar, 1983, 5B326)
128. *Rivasseau V.*, Construction and Borel summability of planar 4-dimensional Euclidean field theory. Commun. Math. Phys., 1984, 95, № 4, 445—486
129. *Ruijsenaars S. N. M.*, The Wightman axioms for the fermionic Federbush model. Commun. Math. Phys., 1982, 87, № 2, 181—228 (PЖMar, 1983, 6B294)

130. *Sénéor R.*, Superrenormalizable infrared theories. «Lect. Notes Math.», 1983, 1031, 108—113
131. *Spencer T.*, The Lipatov argument. Commun. Math. Phys., 1980, 74, № 3, 273—280 (PЖМат, 1980, 12B269)
132. *Weingarten D. H., Challifour J. L.*, Continuum limit of QED₂ on a lattice. Ann. Phys., (USA), 1979, 123, № 1, 61—101 (PЖМат, 1980, 5B221)
133. —, —, Continuum limit of QED₂ on a lattice. II. Ann. Phys., (USA), 1980, 126, № 1, 154—175 (PЖМат, 1981, 154—175)
134. *Westwater M. J.*, On Edward's model for long polymer chains. Commun. Math. Phys., 1980, 72, № 2, 131—174 (PЖМат, 1980, 8B135)
135. —, On Edward's model for polymer chains. II. The self-consistent approach. Commun. Math. Phys., 1981, 79, № 1, 53—73 (PЖМат, 1981, 7B257)
136. —, On Edward's model for polymer chains. III. Borel summability. Commun. Math. Phys., 1982, 84, № 4, 459—470 (PЖМат, 1982, 12B320)
137. —, Edward's model for long polymer chains. Lect. Notes Phys., 1982, 153, 394—396 (PЖМат, 1982, 9B201)

ВЫПУСКИ И ТОМА СЕРИИ, ОПУБЛИКОВАННЫЕ РАНЕЕ

- | | |
|---|--|
| <p>Алгебра. Топология. 1962. М., 1964
 Математический анализ. Теория вероятностей. Регулирование. 1962. М., 1964
 Геометрия. 1963. М., 1965
 Математический анализ. 1963. М., 1965
 Теория вероятностей. 1963. М., 1965
 Алгебра. 1964. М., 1966
 Математический анализ. 1964. М., 1966
 Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика. 1964. М., 1966.
 Алгебра. Топология. Геометрия. 1965. М., 1967
 Математический анализ. 1965. М., 1966
 Алгебра. Топология. Геометрия. 1966. М., 1968
 Математический анализ. 1966. М., 1967
 Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика. 1966. М., 1967
 Алгебра. Топология. Геометрия. 1967. М., 1969
 Математический анализ. 1967. М., 1969
 Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика. 1967. М., 1969
 Алгебра. Топология. Геометрия. 1968. М., 1970
 Математический анализ. 1968. М., 1969
 Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика. 1968. М., 1970
 Алгебра. Топология. Геометрия. 1969. М., 1970
 Математический анализ. 1969. М., 1971
 Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика. 1969. М., 1970</p> | <p>Алгебра. Топология. Геометрия. Том 10. 1971
 Математический анализ. 1970. М., 1971
 Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика. 1970. М., 1971
 Алгебра. Топология. Геометрия. 1970. М., 1972; Том 11, 1974; Том 12, 1974; Том 13, 1975; Том 14, 1977; Том 15, 1977; Том 16, 1978; Том 17, 1979; Том 18, 1980; Том 18, 1981; Том 19, 1981; Том 20, 1982; Том 21, 1983; Том 22, 1984; Том 23, 1985
 Математический анализ. Том 10, 1973; Том 11, 1973; Том 12, 1974; Том 13, 1975; Том 14, 1977; Том 15, 1977; Том 16, 1978; Том 17, 1979; Том 18, 1980; Том 19, 1981; Том 20, 1982; Том 21, 1983; Том 22, 1984; Том 23, 1985
 Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика. Том 10, 1972; Том 11, 1974; Том 12, 1972; Том 13, 1976; Том 14, 1977; Том 15, 1978; Том 16, 1978; Том 17, 1979; Том 18, 1981; Том 19, 1982; Том 20, 1983; Том 21, 1983; Том 22, 1984; Том 23, 1986
 Современные проблемы математики. Том 1, 1973; Том 2, 1973; Том 3, 1974; Том 4, 1975; Том 5, 1975; Том 6, 1976; Том 7, 1976; Том 8, 1977; Том 9, 1977; Том 10, 1978; Том 11, 1978; Том 12, 1978; Том 13, 1979; Том 14, 1979; Том 15, 1980; Том 16, 1980; Том 17, 1981; Том 18, 1981; Том 19, 1982; Том 20, 1982; Том 21, 1982; Том 22, 1983; Том 23, 1983; Том 24, 1984; Том 25, 1984; Том 26, 1985; Том 27, 1985
 Проблемы геометрии. Том 7, 1976; Том 8, 1977; Том 9, 1979; Том 10, 1978; Том 11, 1981; Том 12, 1981; Том 13, 1982; Том 14, 1983; Том 15, 1984; Том 16, 1984; Том 17, 1985</p> |
|---|--|

СО Д Е Р Ж А Н И Е

(Соответствует рубрикам 27.43—27.45 Рубрикатора ГАСНТИ)

В. Л. Гирко. Случайные детерминанты	3
§ 1. Полярное разложение случайных матриц	3
§ 2. Моменты случайных детерминантов Вандермонда	6
§ 3. Интегральные представления для детерминантов	7
§ 4. Интегрирование на алгебрах Грассмана и Клиффорда	8
§ 5. Распределение корней характеристического уравнения	9
§ 6. Стохастическое условие Калмана	11
§ 7. Методы вычисления моментов случайных детерминантов	11
§ 8. Гипотеза Фреше	15
§ 9. Проблема Ляпунова для систем линейных стационарных уравнений со случайными коэффициентами	17
§ 10. Стохастический метод наименьших квадратов	18
§ 11. Случайные детерминанты Фредгольма и управление спектром случайных линейных операторов в гильбертовом пространстве	20
§ 12. Центральная предельная теорема для случайных детерминантов	22
§ 13. О связи между сходимостью случайных детерминантов и сходимостью спектральных функций случайных матриц	24
§ 14. Полукруговой закон Вигнера	25
§ 15. V -преобразование спектральных функций	27
§ 16. Круговой закон	28
§ 17. Эллиптический закон	29
§ 18. Осцилляционная теорема Штурма	30
§ 19. Закон арктангенса	30
§ 20. Случайные детерминанты Фредгольма	31
§ 21. Элементы G -анализа	35
§ 22. Уравнение Дайсона	40
§ 23. Предельные теоремы для нормированных спектральных функций пучка самосопряженных случайных матриц	41
Литература	47
М. В. Меньшиков, С. А. Молчанов, А. Ф. Сидоренко, Теория перколяции и некоторые приложения	53
Введение	53
§ 1. Постановка дискретных задач теории перколяции	62
§ 2. О точных значениях критических вероятностей	65
§ 3. Метод поколений	67
§ 4. Метод проектирования	70
§ 5. Возрастающие события. Базовые неравенства. Формула Руссо	72
§ 6. Совпадение критических точек	75
§ 7. Другие перколяционные характеристики	83
§ 8. Непрерывные модели перколяции	84
§ 9. Просачивание случайных полей	96
§ 10. Многომасштабные схемы перколяции	103
Литература	108

В. А. Малышев, Ультрафиолетовые проблемы в теории поля и много-	
масштабные разложения	111
Глава 1. Перенормировки и многомасштабные разложения	113
§ 1. Основные определения	113
§ 2. Элементы диаграмматики	120
§ 3. Формальные перенормировки в ультрафиолетовой области	129
§ 4. Оценки перенормированных диаграмм	135
§ 5. Упрощенные модели	142
Глава 2. Ренормгруппа и многомасштабные разложения	151
§ 1. Ренормгруппа Вильсона	151
§ 2. Одномасштабные кластерные оценки для ферми-полей	155
§ 3. Итерация ренормгруппы Вильсона в окрестности гауссовой неподвижной точки	159
§ 4. Сверхперенормируемая ИАС фермионная модель	164
§ 5. Сверхперенормируемая УАС фермионная модель	168
§ 6. Большие значения поля в бозонных моделях	170
Глава 3. Дополнения	171
§ 1. Возмущение гауссова поля на R^4	171
§ 2. Решетчатые поля с дальнедействующим неограниченным потенциалом	173
§ 3. Моды Федербуша и разложение Бэттла	175
§ 4. Другие работы	178
Литература	181

Технический редактор *З. А. Прусакова*

Сдано в набор 03.03.86

Подписано в печать 31.07.86

Формат бумаги 60×90^{1/16}.

Бум. тип. № 2

Литературная гарнитура.

Высокая печать.

Усл. печ. л. 11,75

Усл. кр.-отт. 12,0

Уч.-изд. л. 10,48

Тираж 1200 экз.

Заказ 1848

Цена 2 руб.

Адрес редакции: 125219, Москва, А-219, Балтийская ул., 14. Тел. 155-42-41

Производственно-издательский комбинат ВИНТИ

140010, Люберцы, 10, Московской обл., Октябрьский просп., 403

Индекс 57021

ИНТ Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика, т. 24, 1986, 1—188

О П Е Ч А Т К И

Итоги науки и техн. Теория вероятностей. Мат. стат.
Техн. Киб. 1986 г., выпуск 24 том

Страница	Строка	Напечатано	Следует читать
79	1 сверху	$d_2 P_p D_{[n/k]}(v) < 1:$	$d_2 P_p (D_{[n/k]}(v)) < 1:$
99	7 снизу	$\left(\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{d}{\sigma^2} \right)^i \sum_{i=0}^{\infty} a_i^2 \right) \dots$	$\left(\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{d}{\sigma^2} \right)^i \sum_{i=0}^{\infty} a_i^2 \right)^{n/2} \dots$

Зак. 1848

